مدیریت صنعتی
دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
دورهٔ ۶، شمارهٔ ۲
تابستان ۱۳۹۳
ص. ۳۱۶-۳۰۳

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از مدل ابرکارایی غیر شعاعی

سید علی رخشان[۱]، محمدرضا علیرضایی[۲]

چکیده: تحلیل پوششی داده‌ها، روشی ناپارامتریک برای سنجش و ارزیابی کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه است. از آنجایی که مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای تصمیم‌گیرنده را به دو دستهٔ کارا و ناکارا تقسیم می‌کنند، اغلب تصمیم‌گیرنده‌ها درصدد رتبه‌بندی کاملی از واحدهای تصمیم‌گیرنده هستند. در این نوشتار به توسعهٔ مدلی برای رتبه‌بندی واحدهای کارا در تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته شده است. از این رو، ابتدا محققان دو مدل جدید غیر خطی پیشنهاد کرده‌اند که با استفاده از مدل اول، به محاسبهٔ کارایی پرداخته و به‌کمک مدل دوم، واحدهای تصمیم‌گیرندهٔ کارا رتبه‌بندی می‌شوند؛ به‌طوری که این مدل‌ها همواره یک جواب شدنی دارند و درنهایت برای بررسی بیشتر در چندین مثال عددی، مدل پیشنهادی موجود در مقاله با سایر مدل‌های رتبه‌بندی مقایسه شده‌اند. نتایج تأییدکنندهٔ عملکرد مناسب مدل پیشنهادی است.

واژه‌های کلیدی: ابرکارایی، تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، مدل‌های غیر شعاعی SAR.

۱. کارشناس‌ارشد ریاضی کاربردی، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
۲. دانشیار گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۱/۲۴
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۲/۱۰/۱۸
نویسندهٔ مسئول مقاله: سید علی رخشان
E-mail: seyedalirakhshan@yahoo.com

مقدمه

امروزه تصمیم‌گیری یکی از مسائل مهمی است که در زندگی شخصی و اجتماعی انسان‌ها نقش بسزایی دارد؛ از این رو، ضرورت وجود یک روش قوی که بتواند انسان را در این زمینه یاری کند، کاملاً محسوس است. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[1] روشی است با ساختار ریاضی و مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی که برای اولین بار چارنز و همکارانش (چارنز، کوپر و رودز، ۱۹۸۷) آن را ارائه کردند. این روش در واقع تعمیم کار فارل در ابداع اولین روش غیر پارامتری است (فارل، ۱۹۵۷). تحلیل پوششی داده‌ها ابزاری است که امروزه کاربردهای فراوانی در زمینه‌های کنترل، مدیریت و تصمیم‌گیری دارد (ونگ، لیو، الحاق، ۲۰۰۸). در این روش، هر واحد تصمیم‌گیری (DMU)[2] براساس چندین ورودی و خروجی ارزیابی شده و به دو گروه کارا و ناکارا تقسیم می‌شود. برای رتبه‌بندی واحدهای کارا در DEA روش‌های گوناگونی معرفی شده است، برای نمونه، روش کارایی تقاطعی که برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده پیشنهاد شد (سکستون، سیلکمن، هوگان، ۱۹۸۶). جهانشاهلو و همکارانش یک فرایند رتبه‌بندی برای واحدهای کارا، بر اساس تأثیرات این واحدها روی واحدهای ناکارا پیشنهاد کرده‌اند (جهانشاهلو، جونیور، لطفی و اکبریان، ۲۰۰۷). اندرسون و پترسون (۱۹۹۳) روشی ارائه داده‌اند که بعدها به روش ابرکارایی برای رتبه‌بندی واحدها معروف شد. با توجه به روش ابرکارایی، روش MAJ برای رتبه‌بندی DMU ها معرفی شد (جهانشاهلو، علیرضایی، محرابیان، ۱۹۹۹). از آنجاکه بسیاری از روش‌های موجود در رتبه‌بندی، در مثال‌هایی خاص به جواب نشدنی در رتبه‌بندی واحدهای کارا می‌رسند، نیاز به روش‌هایی که همواره شدنی باشند، احساس می‌شود.

ادامهٔ این نوشتار در بخش ادبیات پژوهش، روش‌های رتبه‌بندی و مشکلات آنها به‌طور مختصر تشریح می‌شود، در بخش روش پژوهش، نوآوری موجود در پژوهش با عنوان مدل‌های غیر شعاعی SAR برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده را پیشنهاد کرده و سپس در بخش یافته‌های پژوهش با مثال‌هایی عددی، روش پیشنهادی با روش رتبه‌بندی ابرکارایی و تعدادی روش موجود، مقایسه می‌شود. در پایان نیز نتیجه‌گیری کلی از بحث بیان خواهد شد.

پیشینهٔ نظری پژوهش

تحلیل پوششی داده‌ها

ارزیابی عملکرد سازمان در جهت‌گیری تصمیمات آتی آنها نقش اساسی دارد. در این راستا باید کارایی و بهره‌وری سازمان‌ها محاسبه شود تا از این طریق بتوان در تصمیم‌سازی‌های آتی روند

1. Data Envelopment Analysis
2. Decision Making Unit

رشد اقتصادی را زیر نظر داشت. در عصر حاضر دستیابی به رشد اقتصادی از طریق ارتقای بهره‌وری، از مهم‌ترین اهداف اقتصادی کشورها به‌شمار می‌رود. ارتقای بهره‌وری با استفاده از عوامل تولید حاصل می‌شود که به رشد اقتصادی مستمر و تولید پایدار کمک می‌کند.

یکی از ابزارهای مهم و مناسب در این زمینه، تحلیل پوششی داده‌ها است. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش ناپارامتریک است که با فرض اصول موضوعهٔ تولید، به ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) می‌پردازد که هر یک دارای چندین ورودی و چندین خروجی هستند. امروزه استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها با سرعت زیادی در حال گسترش بوده و در ارزیابی سازمان‌ها و صنایع مختلف، مانند صنعت بانکداری، پست، بیمارستان‌ها، مراکز آموزشی، نیروگاه‌ها، پالایشگاه‌ها و... استفاده می‌شود. توسعه‌های زیادی از جنبهٔ نظری و کاربردی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها رخ داده که شناخت جوانب مختلف آن را برای به‌کارگیری دقیق‌تر اجتناب‌ناپذیر می‌کند. استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف سازمان‌ها را در شاخص‌های مختلف تعیین‌کرده و با ارائهٔ میزان مطلوب آنها، خط‌مشی سازمان را به سوی ارتقای کارایی و بهره‌وری مشخص می‌کند.

همچنین الگوهای کارا واحدهایی هستند که با ورودی‌های مشابه واحد ناکارا، خروجی‌های بیشتر یا همان خروجی‌ها را با استفاده از ورودی‌های کمتر تولید کرده‌اند. این تنوع وسیع در نتایج است که موجب شده استفاده از این روش با سرعت فزاینده‌ای رو به گسترش باشد و همین امر موجب شده است که روش تحلیل پوششی داده‌ها از بعد نظری نیز رشد زیادی داشته باشد و به یکی از شاخه‌های فعال در علم تحقیق در عملیات تبدیل شود.

مجموعهٔ امکان تولید

مجموعه‌ای که در اصول زیر صدق کند را مجموعهٔ امکان تولید می‌نامند:

۱. اصل شمول مشاهدات: تمام (X,Y) مشاهده شده به مجموعه تعلق دارد (کوپر، سیفورد، تون، ۲۰۰۰).

۲. اصل اشعهٔ بیکران: اگر (X,Y) یک عضو از مجموعه باشند، آنگاه $\lambda \geq 0$, $(\lambda X, \lambda Y)$ نیز به مجموعه تعلق دارد (کوپر و همکاران، ۲۰۰۰).

۳. اصل تحدب: اگر (x_1, y_1) عضوی از مجموعه باشند، آنگاه داریم:

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad , \quad \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \; \lambda \geq 0$$

که یک ترکیب خطی از دو نقطهٔ بالاست نیز، عضوی از مجموعه است (کوپر و همکاران، ۲۰۰۰).

۴. اصل امکان‌پذیری: اگر (X,Y) یک عضو از مجموعه باشند، آنگاه به‌ازای تمام (X',Y') به‌طوری که $X' \geq X, Y' \leq Y$ آنگاه (X',Y') به مجموعه تعلق دارد (کوپر و همکاران، ۲۰۰۰)

۵. اصل کمینه: کوچکترین مجموعهٔ تولیدشده توسط اصول ۱، ۲، ۳ و ۴، مجموعهٔ امکان تولید را شکل می‌دهند (اوتو و بوگتوفت، ۲۰۱۱).

مدل CCR

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده داشته باشیم که هر یک دارای m ورودی و s خروجی باشد. فرض کنید x_{ip} ورودی iام واحد p که $p \in \{1, \dots, n\}$ و y_{rp} خروجی rام واحد p باشد. بنابراین نقطهٔ $(X_p, Y_p) = (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{mp}, y_{1p}, y_{2p}, \dots, y_{mp})$ نمایش واحد p در فضای مجموعهٔ امکان تولید است. مجموعهٔ امکان تولید و مدل CCR به‌صورت زیر است (چارنز و همکاران، ۱۹۸۷):

رابطهٔ ۱)
$$T_k = \{(X,Y) | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq X, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq Y, \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n\}$$

رابطهٔ ۲)
$$CCR: min\ \theta_o$$
$$s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1,\dots,s$$
$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,\dots, n$$

از آنجایی که مدل‌های پایه‌ایی تحلیل پوششی داده‌ها، از جمله آنها مدل CCR، واحدهای تصمیم‌گیرنده را به دو دستهٔ کارا و ناکارا تقسیم می‌کنند، به‌طوری که هیچ رتبه‌بندی برای واحدهای کارا قائل نمی‌شوند، از این رو، توسعهٔ مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای رتبه‌بندی واحدهای کارا احساس می‌شود. تعدادی از این روش‌ها در ادامه بررسی می‌شود.

روش‌های رتبه‌بندی واحدهای کارا

سکستون روش کارایی تقاطعی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری معرفی کرد (سکستون و همکاران، ۱۹۸۶). در این روش مبنای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس تأثیر

ضرایب بهینهٔ ورودی‌ها و خروجی‌ها یک واحد، بر روی واحدهای مختلف است. در روش کارایی تقاطعی از مدل مضربی CCR به‌صورت زیر استفاده می‌شود. فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده داشته باشیم که هریک متشکل از m ورودی و s خروجی باشد، فرض کنید x_{ip} ورودی iام واحد p که $p \in \{1, \dots, n\}$ و y_{rp} خروجی rام واحد p باشد و همچنین بردار V و U به ترتیب ضرایب ورودی و خروجی هستند:

رابطهٔ ۳)

$$CCR: max\ \theta = \sum_{r=1}^{S} u_r y_{rp}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1,\dots,n$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1,\dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1,\dots, m$$

حال با استفاده از ضرایب بهینهٔ (مطلوب) به‌دست آورده از مدل CCR، برای هر واحد تصمیم‌گیرنده، مقدار θ_k^t را به‌صورت رابطهٔ ۴ تعریف می‌کنیم:

رابطهٔ ۴)

$$\theta_k^t = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk}^* y_{rt}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik}^* x_{it}}$$

که در آن u_{rk}^* و v_{ik}^* به‌ترتیب وزن‌های بهینهٔ خروجی و ورودی برای واحد kام به‌کمک رابطهٔ ۳ هستند. به بیان دیگر، θ_k^t مقدار کارایی واحد tام، به‌کمک وزن‌های بهینهٔ واحد kام است. با انجام فرایند فوق برای هر دو زوج واحدهای تحت بررسی، ماتریس تقاطعی زیر را خواهیم داشت.

جدول ۱. ماتریس تقاطعی

θ_1^1	θ_2^1	...	θ_n^1
θ_1^2	θ_2^2	....	θ_n^2
...	...	...	...
θ_1^n	θ_2^n	...	θ_n^n

مشکل اصلی روش کارایی تقاطعی، وجود جواب‌های بهینه دگرین است.

اندرسون و پیترسون مدل ابر کارایی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده معرفی کردند (اندرسون، پترسون، ۱۹۹۳). این مدل به AP نیز مشهور است. آنها برای تعیین رتبهٔ واحد تصمیم‌گیرنده، آن را از مجموعهٔ امکان تولید خارج کردند و مدل را برای باقی‌ماندهٔ DMU ها به‌اجرا گذاشتند. مدل پیشنهادی آنها برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌صورت زیر است:

رابطهٔ ۵)

$$min \quad \theta_o$$

$$s.t \quad \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1,...,m$$

$$\sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1,...,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,..., n \; j\neq o$$

مدل ابرکارایی دارای مشکلات اساسی زیر است:

۱. مدل AP در ماهیت ورودی و خروجی با بازده به مقیاس‌های مختلف برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ممکن است نشدنی شود. برای مثال زمانی که ورودی یک واحد صفر باشد (هیکمن و دولا، ۱۹۹۷).

۲. در برخی موارد ممکن است تغییرات کوچکی در داده‌ها، تغییرات زیادی در تابع هدف ایجاد کند، بنابراین این مدل ناپایدار است (هیکمن و دولا، ۱۹۹۷).

با توجه به مشکلات روش AP محرابیان و همکاران مدل MAJ را معرفی کردند. همان‌طور که از مدل AP مشخص است، حرکت واحدهای تصمیم‌گیرنده به سوی مرز به‌صورت شعاعی انجام می‌گیرد که این حرکت اشکالی را ایجاد کرده است. اما مدل MAJ بر خلاف مدل AP یک مدل غیر شعاعی است. مدل MAJ مشکل ناپایداری روش AP را حل می‌کند، اما همچنان برای برخی داده‌ها نشدنی است (جهانشاهلو و همکاران، ۱۹۹۹). مدل MAJ به‌صورت زیر است:

رابطهٔ ۶)

$$MAJ: \; min \; 1+W$$

$$s.t \quad \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} + W \quad i = 1,...,m$$

$$\sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1,...,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,..., n \; j \neq o$$

جهانشاهلو و همکاران روشی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده که کارای رأسی هستند، ارائه دادند. در این روش از تابع فاصلهٔ نرم یک استفاده کردند. اساس این روش نیز

ابرکارایی است. این روش نیز همواره شدنی است (جهانشاهلو، حسین‌زاده لطفی، شجاع، توحیدی، رضویان، ۲۰۰۴).

رابطهٔ ۷)

$$L_1 - norm:\ min \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_{io}| + \sum_{r=1}^{s} |y_r - y_{ro}|$$

$$s.t \quad \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1,...,m$$

$$\sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1,...,s$$

$$x_i \geq 0, y_r \geq 0 \quad i = 1,...,m\ , r = 1,...,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,...,n\ j \neq o$$

رضایی و همکاران روشی بر پایهٔ نرم چبیشف[1] برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه کردند. اساس این روش بر اساس ابرکارایی است. این روش جزء محدود کاربردهای نرم چبیشف در تحلیل پوششی داده‌هاست (رضایی، ضیائی رضایی، جهانشاهلو، حسین زاده لطفی ۲۰۱۲). این مدل در رابطهٔ ۸ نشان داده شده است:

رابطهٔ ۸)

$$min \quad V_o$$

$$s.t \quad \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij} - x_{io} \leq V_o \quad i = 1,...,m$$

$$y_{ro} - \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj} \leq V_o \quad r = 1,...,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,...,n\ j \neq o$$

اکثر روش‌های رتبه‌بندی موجود، یا ورودی‌محور یا خروجی محور هستند و در محاسبهٔ کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌صورت شعاعی عمل می‌کنند. همچنین خیلی از روش‌های موجود در رتبه‌بندی واحدهای کارا به جواب نشدنی می‌رسند. از این رو به روشی که بدون محور باشد و همچنین به‌صورت غیر شعاعی در محاسبهٔ کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده عمل کند و همواره یک جواب شدنی برای رتبه‌بندی واحدهای کارا داشته باشد، نیاز داریم.

---

1. Tchebycheff norm

روش‌شناسی پژوهش

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از مدل‌های غیر شعاعی SAR

در این بخش ابتدا روش رتبه‌بندی پیشنهادی ارائه می‌شود و سپس به تشریح ویژگی‌ها و مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های موجود پرداخته خواهد شد.

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده داشته باشیم که هریک دارای m ورودی و s خروجی باشد. فرض کنید x_{ip} ورودی iام واحد p که $p \in \{1, \dots, n\}$ و y_{rp} خروجی rام واحد p باشد. بنابراین نقطهٔ $(X_p, Y_p) = (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{mp}, y_{1p}, y_{2p}, \dots, y_{mp})$ نمایش واحد p در فضای مجموعه امکان تولید است.

گام اول: مدل غیر شعاعی SAR(۱) برای محاسبهٔ کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده

در این روش ابتدا تمامی واحدها توسط مدل پوششی SAR(۱) ارزیابی‌شده و واحدهای تصمیم‌گیرندهٔ کارا و ناکارا از این مدل استخراج می‌شود. مدل SAR(۱) تحت بازده به مقیاس ثابت در رابطهٔ ۹ نشان داده شده است:

رابطهٔ ۹)

$$SAR(1): min\ z_1 = \frac{1}{2}(\theta_o + \frac{1}{\varphi_o})$$

$$s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta_o x_{io} \quad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \varphi_o y_{ro} \quad r = 1,\dots,s$$

$$0 < \theta_o \le 1$$

$$\varphi_o \ge 1$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad j = 1,\dots, n$$

تمامی مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها دارای دو جهت ورودی و خروجی هستند. بسته به نوع مدل، تغییرات ممکن در ورودی‌ها یا خروجی‌ها اعمال می‌شود. برای مثال، اگر نوع مدل انتخابی ورودی‌محور باشد، برای محاسبهٔ کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ثابت نگه‌داشتن خروجی‌ها در سطح موجود، سعی بر کاهش ورودی‌ها خواهد شد تا زمانی که تصویر واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی روی مرز کارایی قرار گیرد. به همین صورت مدل‌های خروجی‌محور را می‌توان توصیف کرد.

همان‌طور که در رابطهٔ ۹ مشاهده می‌شود، مدل SAR(۱) یک مدل بدون جهت است. در این مدل ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌طور همزمان به‌ترتیب کاهش و افزایش پیدا می‌کنند. بنابراین از این جنبه می‌تواند نسبت به مدل‌های پایه‌ای مطلوب‌تر باشد. برای مثال، یک کارخانه را واحد منتخب برای بررسی فرض کنید؛ به‌طوری که کارکنان ورودی آن در نظر گرفته شود و محصول تولیدی خروجی آن باشد. مدل SAR(۱) برای کاهش تعداد کارکنان و افزایش تولید محصول عمل می‌کند که می‌تواند برای آن کارخانه بسیار بهینه باشد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در رابطهٔ ۹ تمامی محدودیت‌ها خطی هستند، ولی تابع هدف غیر خطی است. از آنجایی که مسائلی که به بررسی آنها پرداخته می‌شود، در تحلیل پوششی داده‌ها، متناهی بوده و دارای مجموعه امکان تولید محدب‌اند، بنابراین همواره دارای جواب هستند. مقدار φ_o در مدل بالا رو به افزایش است که در نهایت توسط محدودیت $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_o y_{rp}$ کنترل می‌شود و مقدار آن به بی‌نهایت میل نمی‌کند. اما از لحاظ ریاضی نمی‌توان از خطای موجود در مدل‌های غیر خطی چشم‌پوشی کرد.

بعد از استخراج واحدهای کارا و ناکارا به‌کمک مدل SAR(۱)، تمام واحدهای کارا را در مجموعه‌ای مانند E قرار داده و به گام دوم می‌رویم.

گام دوم: رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از مدل SAR(۲)

در این مرحله بعد از تشکیل مجموعه E که در آن واحدهای کارا حضور دارند، به رتبه‌بندی آنها پرداخته می‌شود. واحدهای ناکارا با توجه به مقدار ناکارایی آنها که با استفاده از مدل SAR(۱) محاسبه شدند، رتبه‌بندی می‌شوند. برای رتبه‌بندی واحدهای کارا از مدل SAR(۲) استفاده شده است. مدل SAR(۲) تحت بازده به مقیاس ثابت، در رابطهٔ ۱۰ نشان داده شده است.

رابطهٔ ۱۰)

$$SAR(2): min\ z_2 = \frac{1}{2}(\theta_o + \frac{1}{\varphi_o})$$

$$s.t \quad \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1,...,m\ , o \in E$$

$$\sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_o y_{ro} \quad r = 1,...,s\ , o \in E$$

$$0 < \varphi_o \leq 1$$

$$\theta_o \geq 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,...,n\ , j \neq o$$

همان‌طور که در رابطهٔ ۱۰ مشاهده می‌شود، اساس رتبه‌بندی مدل غیر شعاعی SAR(۲) برپایهٔ روش ابرکارایی است، با این تفاوت که تصویر واحد حذف‌شده از مجموعه امکان تولید که به بررسی آن پرداخته خواهد شد، به‌صورت غیر شعاعی روی مرز قرار می‌گیرد. تفاوت اساسی رابطهٔ ۱۰و رابطهٔ ۹، در نحوهٔ مقداردهی مقادیر φ_o و θ_o است. از آنجا که واحد تحت بررسی از فضای مجموعه امکان تولید خارج می‌شود، بنابراین برای اینکه محدودیت‌های موجود در مدل ارضا شوند تا برای تابع هدف مقداری داشته باشیم، مدل به این صورت عمل می‌کند که یک نقطهٔ تصویر برای واحد تحت بررسی روی مرز انتخاب می‌کند. برای به‌وجود آمدن چنین اتفاقی نیاز به دو محدودیت $۰ < \varphi_o \leq ۱$ و $\theta_o \geq ۱$ داریم. واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی با توجه به مدل SAR(۲) دارای مقدار $z_۲ \geq ۱$ است. بنابراین واحدی که مقدار $z_۲$ بیشتری داشته باشد، در رتبهٔ بالاتری قرار خواهد گرفت. باید این نکته را یادآوری کرد که مدل SAR(۲) فقط یک مدل برای رتبه‌بندی است که اشکالات موجود در روش ابرکارایی را برطرف می‌کند و مقادیر $z_۲$ محاسبه‌شده، فقط جنبهٔ رتبه‌بندی دارند.

هر دو مدل SAR را می‌توان تحت بازده به مقیاس متغیر نیز بررسی کرد.

یافته‌های پژوهش

در راستای قوت بخشیدن به رتبه‌بندی پیشنهادی در این مقاله، ۲ قضیهٔ زیر را بیان‌کرده و آنها را اثبات می‌کنیم:

قضیهٔ ۱: اگر واحدی تحت مدل CCR کارا باشد، تحت مدل SAR(۱) کاراست.

اثبات: فرض کنید واحد pام تحت ارزیابی باشد که تحت مدل CCR کاراست. بنابراین در حالت ورودی‌محور و خروجی‌محور دارای مقدار کارایی یک است؛ یعنی $\varphi_p = ۱$ و $\theta_p = ۱$. لذا داریم: $z_۱ = \frac{۱}{۲}(\theta_p + \frac{۱}{\varphi_p}) = ۱$. بنابراین اگر واحدی تحت مدل CCR کارا باشد، تحت مدل SAR(۱) نیزکارا است.

قضیهٔ ۲: با فرض بازده به مقیاس ثابت مدل SAR(۲) همیشه شدنی است.

اثبات: برای اثبات قضیه کافی است تا نشان دهیم که در دو حالت زیر، همواره یک نقطهٔ شدنی در فضای شدنی متشکل از محدودیت‌های مدل SAR(۲) وجود دارد.

حالت اول: زمانی که واحد تحت ارزیابی روی مرز مجموعه امکان تولید باشد.

در این حالت کافی است مقادیر زیر را برای متغیرهای مدل SAR(۲) در نظر بگیریم.

$\theta_p = 1,\ \varphi_p = 1\ , \lambda_{\mathrm{j}} \geq 0 \quad \mathrm{j} = 1,\ldots, \mathrm{n}\ , j \neq p$

در این صورت تمامی محدودیت‌های مدل SAR(۲) شدنی می‌شوند.

حالت دوم: زمانی که واحد تحت بررسی در مدل SAR(۲) بیرون از مجموعه امکان تولید باشد، می‌توان φ_p و θ_p را به‌ترتیب آنقدر بزرگتر از یک و کوچکتر از یک در نظر گرفت که برای هر $\mathrm{j} = ۱,\ldots, \mathrm{n}\ , j \neq p$ $\lambda_{\mathrm{j}} \geq ۰$ محدودیت‌های مدل SAR(۲) برقرار شوند.

همچنین می‌توان طبق اصل ارشمیدوسی اعداد حقیقی[۱] نشان دهیم که این نقطه شدنی همواره وجود دارد؛ به این صورت که با در نظر گرفتن $x_{\mathrm{ip}} \geq ۰\ , \theta_p \geq ۱$، بنابراین داریم: $\theta_p x_{\mathrm{ip}} \geq ۰$. لذا بنابر اصل ارشمیدوسی اعداد حقیقی وجود دارد $\lambda_{\mathrm{k}} \geq ۰$ به‌طوری که $\lambda_{\mathrm{k}} x_{\mathrm{ik}} \leq \theta_p x_{\mathrm{ip}}$. لذا با در نظر گرفتن $j \neq p, k$ و $\mathrm{j} = ۱,\ldots, \mathrm{n}$ و $\lambda_{\mathrm{j}} \geq ۰$ محدودیت $\sum_{j=۱,\mathrm{j}\neq \mathrm{p}}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_p x_{ip}$ برقرار می‌شود. طبق همین اصل، شدنی بودن محدودیت $\sum_{j=۱,\mathrm{j}\neq \mathrm{p}}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_p y_{rp}$ کاملا بدیهی است.

در بخش‌های قبل به طرح اشکالات مدل ابرکارایی پرداختیم؛ حال مزیت‌های مدل‌های غیر شعاعی SAR نسبت به مدل ابرکارایی بیان می‌شود:

۱. مدل‌های SAR نه ورودی‌محور و نه خروجی‌محور هستند، بلکه برای بهبود واحد تحت بررسی در دو جهت ورودی و خروجی حرکت می‌کند.
۲. مدل SAR (۲) همیشه شدنی است. از آنجایی که ضعف اصلی روش ابرکارایی نشدنی بودن آن در برخی مسائل است، با استفاده از این روش می‌توان آن را پوشش داد.

مثال های عددی

در این بخش چندین مثال آورده شده که در آنها با روش پیشنهادی این مقاله محاسبه‌شده و نتایج حاصل از آن با سایر روش‌های رتبه‌بندی مقایسه می‌شود.

مثال ۱. در این مثال به رتبه‌بندی ۷ واحد تصمیم‌گیرنده با ۲ ورودی و ۲خروجی پرداخته می‌شود (داده‌های مثال ۱ از جهانشاهلو و همکاران، ۲۰۱۱) و سرانجام نتایج حاصل از روش SAR با نتایج روش ابرکارایی، مقایسه می‌شوند.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید از بین ۷ واحد تصمیم‌گیری، فقط واحدهای ۳ و ۴ و ۶ کارای CCR هستند. بنابراین با توجه به گام دوم موجود در این مقاله، مجموعهٔ E به‌صورت

---

۱. اصل ارشمیدوسی: فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $x \geq ۰$ باشد، آنگاه یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد؛ به‌طوری که $nx \geq y$.

$E = \{۳ , ۴ , ۶\}$ خواهد بود. از آنجایی که اساس روش SAR بر پایهٔ ابرکارایی است، در این مثال نشان خواهیم داد که رتبه‌بندی SAR با رتبه‌بندی ابرکارایی یکسان است.

جدول ۲. داده‌های مثال ۱

	واحد۱	واحد ۲	واحد ۳	واحد ٤	واحد ٥	واحد ٦	واحد ۷
ورودی ۱	۲	۳	۲	۲	۳	۲	۳
ورودی ۲	۳	۴	۲	۳	۴	۲	۴
خروجی ۱	۴	۵	۴	۵	۴	۴	۵
خروجی ۲	۵	۶	۴	۴	۵	۶	۴

جدول ۳. مقادیر کارایی و رتبه‌بندی

	واحد۱	واحد۲	واحد۳	واحد٤	واحد٥	واحد٦	واحد۷
CCR	۰/۹۳	۰/۷۶	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۶۲	۱/۰۰	۰/۷۱
SAR(۱)	۰/۹۶۴	۰/۸۷۳	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۷۸۷	۱/۰۰	۰/۸۴۵
SAR(۲)	--	--	۱/۰۰	۱/۱۲	--	۱/۲۲	--
ابرکارایی	۰/۹۲۸۶	۰/۷۶۱۹	۱/۰۰	۱/۲۵۰۰	۰/۶۱۰۰	۱/۵۰۰۰	۰/۷۱۴۳
رتبه‌بندی SAR	۴	۵	۳	۲	۷	۱	۶
رتبه‌بندی ابرکارایی	۴	۵	۳	۲	۷	۱	۶

مثال ۲. در این مثال به رتبه‌بندی ۳ واحد تصمیم‌گیرنده با ۲ ورودی و ۲ خروجی پرداخته (داده‌های مثال ۱ از جهانشاهلو و همکاران، ۲۰۰۴) و نتایج حاصل از روش SAR با نتایج حاصل از روش ابرکارایی، روش MAJ و روش $L_{۱} - norm$ مقایسه خواهد شد.

همانطور که در جدول ۴ ملاحظه می‌کنید، از آنجایی که همه DMU ها کارا هستند، لذا بنا به قضیهٔ ۱ مقدار کارایی SAR(۱) و CCR با هم برابرند.

از اطلاعات جدول ۵ درمی‌یابیم که روش ابرکارایی دارای جواب نشدنی است که نقصی بزرگ برای این روش محسوب می‌شود. یکی از مزیت‌های روش SAR این است که همواره جواب شدنی به‌دست می‌آید، بنابراین همواره یک رتبه‌بندی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده داریم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، روش MAJ نیز جواب نشدنی دارد.

جدول ٤. داده‌های مثال ۲

	واحد۱	واحد۲	واحد۳
ورودی ۱	۴	۱	۸
ورودی ۲	۲	۵	۱
خروجی ۱	۰	۱	۰
خروجی ۲	۱	۱	۱
کارایی CCR	۱	۱	۱
کارایی SAR(۱)	۱	۱	۱
مقدار SAR(۲)	۱/۱۴	۱۰۰/۵۷	۱/۴۱

جدول ۵. رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

	واحد۱	واحد۲	واحد۳
ابرکارایی	۲	نشدنی	۱
$L_1 - norm$	۳	۱	۲
MAJ	۲	نشدنی	۱
SAR(۲)	۳	۱	۲

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این نوشتار ما یک روش رتبه‌بندی موسوم به روش مدل غیر شعاعی SAR ارائه کردیم که اساس رتبه‌بندی آن رتبه‌بندی ابرکارایی است. نشان دادیم که اگرچه این روش برگرفته از روش رتبه‌بندی ابرکارایی است، مشکل روش رتبه‌بندی ابرکارایی را که منجر به یک جواب نشدنی در وضعیت‌های مختلف می‌شد را ندارد و در مقایسه با خیلی از روش‌های موجود در این زمینه نیز، بهتر عمل می‌کند. در همین راستا پس از مطرح کردن دو قضیه، به اثبات آنها اقدام کردیم. در قضیهٔ اول ثابت کردیم که هر واحد تصمیم‌گیری که تحت مدل CCR کارا باشد، تحت مدل SAR(۱) نیز کاراست. قضیهٔ اول به ما این اطمینان را می‌دهد که روش رتبه‌بندی پیشنهادی با مدل‌های DEA سازگار است. تفاوت اساسی مدل ۹ با مدل CCR در محوریت آنهاست به‌طوری که مدل CCR بسته به ورودی یا خروجی‌محور بودن آن، به‌ترتیب در راستای کاهش ورودی و افزایش خروجی عمل می‌کند و مقدار کارایی محاسبه می‌شود؛ در حالیکه مدل SAR(۱) به‌طور همزمان ورودی‌ها را کاهش و خروجی‌ها را افزایش می‌دهد. در قضیهٔ دوم این موضوع مطرح شد که مدل پیشنهادی تحت بازده به مقیاس ثابت یا متغیر، همواره شدنی است. این قضیه تکمیل‌کنندهٔ روش پیشنهادی است. در واقع می‌توان گفت این روش نه‌تنها معایب روش ابرکارایی را پوشش می‌دهد، بلکه رتبه‌بندیِ روشِ ابرکارایی، زیرمجموعهٔ روش پیشنهادی است.

منابع

Andersen, P., Petersen, N.C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science, 39 (10): 1261–1264.

Bogetoft, P., Otto, L. (2011). Benchmarking with DEA, SFA, and R., International Series, *in Operations Research & Management Science*, 157, DOI: 10.1007/978-1-4419-7961-2.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2 (6): 429-444.

Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K. (2000). Data envelopment analysis, Second Edition, Springer, New York, USA.

Dula, J.H. and Hickman, B.L. (1997). Effects of excluding the column being scored from the DEA envelopment LP technology matrix, *Journal of the Operational Research Society*, 48: 1001-1012

Farrell, M.J. (1957). The measurement of Productive efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, *part 3*, 120 (3): 253-290.

Jahanshahloo, G.R, Hosseinzadeh Lotfi, F., Shoja, N., Tohidi, G., Razavian, S. (2004). Ranking using L1-norm in data envelopment analysis, *Applied Mathematics and Computation*, 153, 215-224.

Jahanshahloo, G.R, Hosseinzadeh Lotfi, F., Rezaie, V., Khanmohammadi, M. (2011). Ranking DMUs by ideal points with interval data in DEA, *Applied Mathematical Modelling*, 35(1): 218-229.

Jahanshahloo, G.R., Junior, H.V., Lotfi, F.H., Akbarian, D. (2007). A new DEA ranking system based on changing the reference set. *European Journal of Operational Research*, 181 (1): 331–337.

Mehrabian, S., Alirezaee, M.R., Jahanshahloo, G.R. (1999), A complete efficiency ranking of decision making units in data envelopment analysis, *Computational optimization and applications*, 14 (2): 261-266.

Rezai Balf, F., Zhiani Rezai, H., Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F. (2012). Ranking efficient DMUs using the Tchebycheff norm, *Applied Mathematical Modelling*, 36 (1): 46–56.

Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J. (1986). *Data Envelopment Analysis.* Jossey-Bass, San Francisco.

Wang, Y.M., Liu, J., Elhagh, T.M.S. (2008b). An integrated AHP–DEA methodology for bridge risk assessment. *Computers and Operations Research*, 54 (3): 513–525.