Industrial Management Journal

Print ISSN: 2008-5885

Online ISSN: 2423-5369

Comparing Optimal Portfolio Performance Based on Skew-Normal Distribution and Skew-Laplace-Normal Distribution: A Mean-Absolute Deviation-Entropy Approach

Hila Rezaei

Ph.D. Candidate, Department of Industrial Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Affairs, Semnan University, Semnan, Iran. E-mail: hilarezaei@semnan.ac.ir

Gholamhossien Golarzi *

*Corresponding Author, Associate Prof., Department of Business Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Affairs, Semnan University, Semnan, Iran. E-mail: g_golarzi@semnan.ac.ir

Omid Karimi

Assistant Prof., Department of Statistics, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Semnan University, Semnan, Iran. E-mail: omid.karimi@semnan.ac.ir

Abstract

Objective

Investors typically seek to strike the optimal balance between potential returns and associated risks in their trades. Various models have been presented to choose the optimal portfolio using different approaches. one of these methods is based on the statistical distribution of asset return**.** In these methods, the type of distribution of returns is first identified, and a suitable portfolio selection method is then applied based on this identified distribution type. This study compares the effectiveness of the mean-absolute deviation-entropy model utilizing both Skew-Normal Distribution and Skew-Laplace-Normal Distribution for constructing an optimal portfolio in the Tehran Stock Exchange over 36 months from April 2018 to March 2020.

Methods

The data used in this study comprises the monthly returns of 181 companies listed on the Tehran Stock Exchange. These returns were gathered from a statistical population of 338 members utilizing Morgan's table and Cochran's formula. After fitting density functions for Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal distributions to the returns, maximum likelihood estimates were obtained using the Stats package and the optim Function in R software. The reliability of these estimates was then checked using bootstrap sampling

with 1,000 repetitions. Subsequently, relationships corresponding to the mathematical expectation of return distribution and the objective function representing the risk of absolute deviation were estimated using numerical methods. Therefore, this paper aimed to propose a multi-objective optimization model, namely a mean-absolute deviation-entropy model for portfolio optimization by using a goal-programming approach based on Skew-Normal Distribution and Skew-Laplace-Normal Distribution. The objective functions of the model were to maximize the mean return, minimize the absolute deviation, and maximize the entropy of the portfolio.

Results

It can be inferred from the observed values of the descriptive statistics of the monthly stock returns corresponding to the stock exchange symbols that some stocks have different skewness and kurtosis values compared to the normal distribution. For example, The symbol "Shepna" exhibits negative skewness, indicating a left-skewed distribution. Similarly, the distribution of the "Basama" symbol exceeds the normal distribution. These instances suggest that the normal distribution is inadequate for describing monthly return distributions. Instead, distributions with parameters should be employed to account for skewness and kurtosis. According to the obtained results, the model utilizing the Skew-Laplace- Normal distribution has a higher performance ratio than the model based on the Skew-Normal distribution.

Conclusion

The reason for this superiority, where the model utilizing the Skew-Laplace-Normal distribution outperforms the model based on the Skew-Normal distribution, is the incorporation of both skewness and kurtosis criteria within the former. Additionally, upon analyzing the descriptive statistics of the symbols, it's evident that the kurtosis of most stock symbols is substantial. Therefore, integrating a combination of higher-order moments (skewness and kurtosis) along with entropy leads to enhanced performance.

Keywords: Absolute deviation, Loss function, Optimal portfolio selection, Shannon entropy.

Citation: Rezaei, Hila; Golarzi, Gholamhossien & Karimi, Omid (2024). Comparing Optimal Portfolio Performance Based on Skew-Normal Distribution and Skew-Laplace-Normal Distribution: A Mean-Absolute Deviation-Entropy Approach. *Industrial Management Journal*, 16(2), 192-214. (*in Persian*)

Industrial Management Journal, 2024, Vol. 16, No 2, pp. 192-214
Published by University of Tehran, Faculty of Management
https://doi.org/10.22059/IMJ.2024.357707.1008043
Article Type: Research Paper
© Authors
Received: April 13, 2023
Received in revised form: July 26, 2023
Accepted: October 04, 2023
Published online:July 20, 2024

مدیریت صنعتی
شاپا چاپی: ۵۸۸۵-۲۰۰۸
شاپا الکترونیکی: ۵۳۶۹-۲۴۲۳

مقایسهٔ عملکرد پرتفولیوی بهینه مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال و توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال با رویکرد مبتنی بر میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی

هیلا رضائی

دانشجوی دکتری، گروه مدیریت صنعتی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. رایانامه: hilarezaei@semnan.ac.ir

غلامحسین گل ارضی *

* نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مدیریت بازرگانی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. رایانامه: g_golarzi@semnan.ac.ir

امید کریمی

استادیار، گروه آمار، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. رایانامه: omid.karimi@semnan.ac.ir

چکیده

هدف: اغلب سرمایه‌گذاران تمایل دارند که در سطح معینی از ریسک، به بازده بیشتری دست یابند؛ به همین دلیل بهینه‌سازی پرتفولیو برای تحقق این هدف مفید است. مدل‌ها و روش‌های مختلفی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه با رویکردهای مختلف ارائه شده است. هدف این پژوهش، به‌کارگیری روش‌های مبتنی بر توزیع بازده دارایی‌ها به‌منظور بهینه‌سازی پرتفولیو است. در این روش‌ها پیش از انتخاب پرتفولیوی بهینه، نوع توزیع بازده‌ها شناسایی می‌شود و با توجه به نوع توزیع بازده‌ها، روشی مناسب به‌کار گرفته می‌شود. در این پژوهش، عملکرد مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی، مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال در تشکیل پرتفولیوی بهینه مقایسه شده است.

روش: داده‌های به‌کار رفته در این پژوهش، بازده‌های ماهانه ۱۸۱ نماد بورسی (متناظر با ۳۳۸ نماد بورسی از جدول مورگان، بر اساس فرمول کوکران برای تعیین حجم نمونه به دست آمد) سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس سهام و اوراق بهادار تهران است. در این پژوهش، پس از برازش توابع چگالی متناظر با توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال به بازده‌ها و یافتن برآوردهای حداکثر درست‌نمایی توزیع‌های برازش با استفاده از بسته نرم‌افزاری استاس و نرم‌افزار آر و بررسی پایایی برآوردهای به‌دست‌آمده با به‌کارگیری روش نمونه‌گیری بوت استرپ با تعداد تکرار ۱۰۰۰ بار، روابط متناظر با امید ریاضی توزیعی بازده‌ها و به‌تبع آن، مقدار تابع هدف متناظر با ریسک انحراف مطلق به روش عددی تخمین زده شد. روش بهینه‌سازی پرتفولیو در این پژوهش، بهینه‌سازی سه هدفه حداکثرسازی میانگین بازده، حداقل‌سازی انحراف مطلق و حداکثرسازی آنتروپی با استفاده از روش بهینه‌سازی آرمانی مبتنی بر توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال است.

یافته‌ها: از مقادیر مشاهده شده آماره‌های توصیفی بازده‌های ماهانه سهام متناظر با نمادهای بورسی، استنباط می‌شود که برخی از سهم‌ها، در مقایسه با توزیع نرمال مقادیر معیارهای چولگی و کشیدگی متفاوتی دارند؛ برای مثال حتی، میزان چولگی نماد «شپنا» منفی است که نشان می‌دهد توزیع بازدهی متناظر با این نماد چوله به چپ است. نمونهٔ دیگر، میزان کشیدگی توزیع بازدهی نماد

«بساما» است که خیلی زیادتر از کشیدگی توزیع نرمال است. هر دو نمونه بیانگر این موضوع است که توزیع نرمال، توزیع برازش مناسبی برای تبیین توزیعی بازده‌های ماهانه نیست و بهتر است از توزیع‌هایی استفاده شود که به‌نحوی پارامترهایی برای تبیین میزان چولگی و کشیدگی توزیع بازده‌ها دارند. یافته‌های پژوهش نشان داد که مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال در مقایسه با مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال عملکرد بسیار بهتری دارد.

نتیجه‌گیری: دلیل برتری مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال در نظر گرفتن هر دو معیار چولگی و کشیدگی است، بر اساس آماره‌های توصیفی نمادها، میزان کشیدگی اغلب نمادهای بورسی چشمگیر است؛ از این رو در نظر گرفتن ترکیبی از معیارهای (چولگی و کشیدگی) و آنتروپی می‌تواند به عملکرد بهتری منجر شود.

کلیدواژه‌ها: آنتروپی شانون، تابع زیان، انحراف مطلق، انتخاب پرتفولیوی بهینه.

استناد: رضائی، هیلا؛ گل‌ارضی، غلامحسین و کریمی، امید (۱۴۰۳). مقایسهٔ عملکرد پرتفولیوی بهینه مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال و توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال با رویکرد مبتنی بر میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی. *مدیریت صنعتی*، ۱۶(۲)، ۱۹۲– ۲۱۴.

مدیریت صنعتی، ۱۴۰۳، دوره ۱۶، شماره ۲، صص. ۱۹۲– ۲۱۴
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
نوع مقاله: علمی پژوهشی
© نویسندگان
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۲۴
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۲/۰۵/۰۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۴/۳۰
doi: https://doi.org/10.22059/IMJ.2024.357707.1008043

مقدمه

یکی از ویژگی‌های اصلی سرمایه‌گذاری در بازار سهام و اوراق بهادار ریسکی بودن و نوسان زیاد بازده آن‌هاست. برای کاهش چنین نوسان‌هایی روش‌های مختلفی مطرح شده است. یکی از روش‌هایی که از دیرباز سرمایه‌گذاران به آن توجه می‌کنند، تشکیل پرتفولیو یا متنوع ساختن سبد سرمایه‌گذاری در سهام و اوراق بهادار است. سرمایه‌گذاران می‌توانند با استفاده از دارایی‌های موجود در بازار، پرتفولیوهای متعددی تشکیل دهند. سؤالی که در اینجا پیش می‌آید این است که از بین پرتفولیوهای متعددی که می‌توان تشکیل داد، پرتفولیوی بهینه یا مطلوب‌ترین پرتفولیو کدام است؟ پرتفولیوی بهینه، پرتفولیویی است که بتواند مطلوبیت سرمایه‌گذار را به حداکثر ممکن برساند. به‌طور علمی‌تر، پرتفولیوی بهینه نشان‌دهندهٔ این است که سرمایه‌گذار چه ترکیبی از دارایی‌ها را انتخاب کند که مطلوبیت او با توجه به محدودیت‌های موجود بیشینه شود. بحث انتخاب دارایی‌ها و تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در هر کدام از آن‌ها، مسئله انتخاب پرتفولیو نامیده می‌شود. در ادبیات مالی، انتخاب پرتفولیوی بهینه، به‌صورت یک مسئلهٔ بهینه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، مسئله مدیریت و انتخاب پرتفولیوی بهینه یک موضوع بین رشته‌ای در اقتصاد، مالی، آمار و ریاضی و... به حساب می‌آید و پژوهشگران مدل‌ها و روش‌های مختلفی را در این رشته‌ها، برای مسئله مدیریت و انتخاب پرتفولیوی بهینه ارائه کرده‌اند (چوی، روجراپایبون و جیانگ[1]، ۲۰۱۶؛ سون، آو، لوکستون و تئو[2]، ۲۰۱۷). مارکوویتز[3] (۱۹۵۲)، نخستین کسی بود که مبحث بهینه‌سازی پرتفولیو را در قالب مدل میانگین ـ واریانس (MV)[4] مطرح کرد. بر اساس این مدل، سرمایه‌گذار با تشکیل پرتفولیو، به‌دنبال دست‌یافتن به حداکثر بازدهی با پذیرش حداقل ریسک است (لام، لام و جامان[5]، ۲۰۲۱). در این مدل واریانس بازده‌های دارایی‌های مالی به‌عنوان معیار ریسک پرتفولیو در نظر گرفته می‌شود. فرض اساسی در این مدل آن است که بازده دارایی‌های مالی توزیع نرمال دارد که این فرض در دنیای واقعی، غیر واقعی است؛ زیرا طبق نتایجی که از تحقیقات مختلف به‌دست آمده است، توزیع بازده‌ها غیرنرمال و دارای چولگی است. برای برطرف کردن این مشکل، مدل میانگین ـ انحراف مطلق مطرح شد که در آن، قدرمطلق انحراف به‌جای واریانس، به‌عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک پرتفولیو به‌کار گرفته می‌شود (کونو و یامازاکی[6]، ۱۹۹۱). ارداس[7] (۲۰۲۰) مدل میانگین ـ انحراف مطلق (MAD)[8] را برای شاخص سهام ترکیه به کار گرفت. فرایند دستیابی به پرتفولیوی بهینه با رویکرد میانگین ـ انحراف مطلق، مشابه با مدل میانگین ـ واریانس، حداکثرسازی بازده در سطح معینی از ریسک یا حداقل‌سازی ریسک در سطح معینی از بازده است. برخلاف مدل میانگین ـ واریانس که در آن برای حل مسائل بهینه‌سازی نیاز است از روش برنامه‌ریزی درجه دوم استفاده شود، محاسبات متناظر با مدل میانگین ـ انحراف مطلق، بر به کارگیری برنامه‌ریزی خطی مبتنی است؛ زیرا توابع هدف در مدل اخیر، به‌صورت توابع خطی هستند که باید بیشینه یا کمینه شوند. مدل MAD

1. Choi, Rujeerapaiboon & Jiang
2. Sun, Aw, Loxton & Teo
3. Markowitz
4. Mean- Variance
5. Lam, Lam & Jaaman
6. Konno & Yamazaki
7. Erdas
8. Mean- Absolute Deviation

به‌دلیل سادگی محاسباتی، به‌خصوص در شرایطی که پرتفولیو شامل تعداد سهام زیادی است، نسبت به مدل میانگین ـ واریانس از محبوبیت بیشتری برخوردار است. با وجود این، در مواردی که سهام خاصی، وزن زیادی از پرتفولیو را به خود اختصاص می‌دهد، این مدل می‌تواند مشکلاتی را به لحاظ تنوع‌بخشی بهینه به‌دنبال داشته باشد؛ زیرا با تخصیص وزن زیادی از پرتفولیو به سهام خاص، شانس سایر سهام برای تخصیص سرمایه کمتر خواهد بود و در نتیجه با توجه به محدودیت سرمایه، به کاهش تنوع‌بخشی منجر خواهد شد و در این صورت، ریسک غیرسیستماتیک افزایش خواهد یافت که به افزایش ریسک کل پرتفولیو ختم خواهد شد. لی و ژانگ[1] (۲۰۲۱) با در نظرگرفتن مسئلهٔ تنوع‌بخشی در بهینه‌سازی پرتفولیو، مدل میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی[2] را معرفی کرده‌اند. لو، ژانگ و جیا[3] (۲۰۲۱)، به مطالعه و بررسی مسئلهٔ بهینه‌سازی پرتفولیو با به‌کارگیری اصل آنتروپی پرداختند. لام و همکاران (۲۰۲۱)، معیار آنتروپی را در مدل میانگین ـ انحراف مطلق (MAD) به‌منظور دستیابی به پرتفولیوی متنوع در نظر گرفتند؛ به این علت که هر چقدر میزان آنتروپی پرتفولیو بیشتر باشد، میزان تنوع بخشی پرتفولیو بیشتر خواهد بود که این خود به کاهش ریسک غیرسیستماتیک منجر خواهد شد و در نتیجه ریسک کل پرتفولیو کاهش خواهد یافت. آن‌ها با استفاده از شاخص داوجونز نشان دادند که مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی[4] از مدل‌های میانگین ـ انحراف مطلق و مدل پرتفولیوی حاصل از وزن یکسان (دارای وزن یکسان برای همه سهام موجود) عملکرد بهتری دارد.

با مرور مطالعات صورت‌گرفته می‌توان گفت که در هیچ‌یک از این مطالعات، بهینه‌سازی پرتفولیو بر اساس فرض توزیع آماری بازده‌ها با در نظر گرفتن امکان چولگی و کشیدگی و در عین حال با خواصی مشابه با توزیع نرمال در نظر گرفته نشده است. به همین دلیل، در این پژوهش، دسته‌ای از توزیع‌های آماری شامل توزیع چوله ـ نرمال و توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال به‌عنوان توزیع برازش بازده‌های دارایی‌های مالی، برای بهبود بهینه‌سازی پرتفولیو بررسی شده است. به عبارت دیگر، هدف این پژوهش به‌کارگیری مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی با در نظر گرفتن دسته‌ای از توزیع‌های آماری شامل توزیع چوله ـ نرمال و توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال، برای تشکیل پرتفولیوی بهینه در بورس سهام و اوراق بهادار تهران است. در این پژوهش، مدلی مبتنی بر میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی، به‌عنوان حالت تعمیم یافته‌ای از توزیع احتمالی بازده دارایی‌ها ارائه می‌شود، در این مدل توزیع‌های چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال که به‌ترتیب توزیع نرمال و توزیع لاپلاس را به‌عنوان حالت خاص در بردارند، در انتخاب پرتفولیوی بهینه مقایسه می‌شوند. به عبارت دیگر، این پژوهش با در نظر گرفتن فرض غیرنرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، از طریق لحاظ کردن توزیع‌های چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال، به‌عنوان توزیع احتمالی بازده دارایی‌های مالی و لحاظ کردن آنتروپی شانون[5] به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی پرتفولیو و نیز استفاده از انحراف مطلق به‌عنوان معیار ریسک به شناسایی پرتفولیوی بهینه با رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی می‌پردازد.

1. Li & Zhang
2. Mean-Variance-Entropy
3. Lu, Zhang & Jia
4. Mean- Absolute Deviation- Entropy
5. Shannon Entropy

پیشینه نظری پژوهش

یکی از موضوعات مهم و کلیدی در اقتصاد مالی شناسایی پرتفولیوی بهینه است. برای این منظور محققان در حوزه‌های اقتصاد، مالی، آمار و ریاضی و هوش مصنوعی و... مدل‌های مختلفی را با رویکردهای مختلف معرفی و ارائه کرده‌اند. در نظر گرفتن معیار مناسب ریسک یکی از اصلی‌ترین مراحل بهینه‌سازی پرتفولیو می‌باشد. نخستین بار، مارکوویتز (۱۹۵۲)، مدل میانگین ـ واریانس را برای شناسایی پرتفولیوی بهینه به‌کار گرفت. مارکوویتز در این مدل، از واریانس یا انحراف معیار بازده‌های تاریخی برای سنجش ریسک اوراق بهادار استفاده کرد. مهم‌ترین مفروضات مدل مارکوویتز، در نظر گرفتن توزیع آماری نرمال، به‌عنوان توزیع برازش بازده دارایی‌ها با عنوان متغیر تصادفی آماری بود. از آنجا که نتیجهٔ تحقیقات صورت‌گرفته در بازارهای مالی نشان‌دهندهٔ توزیع غیرنرمال بازده دارایی‌هاست، می‌توان گفت که مدل بهینه‌سازی کلاسیک ارائه شده توسط مارکوویتز برای انتخاب پرتفولیوی بهینهٔ سهام کارایی لازم را ندارد (ساموئلسون[1]، ۱۹۷۰).

برای برطرف‌کردن این نقص، محققان از معیارهایی غیر از انحراف معیار جهت سنجش ریسک استفاده کردند. کونو و یامازاکی (۱۹۹۱)، از تابع ریسک انحراف مطلق به‌عنوان جایگزین تابع ریسک در مدل مارکوویتز استفاده کردند و یک مدل بهینه‌سازی پرتفولیوی مبتنی بر میانگین ـ انحراف مطلق (MAD) را ارائه دادند. این مدل، خواص مفید مدل مارکوویتز را حفظ و ایرادهای عمده وارد به آن را برطرف می‌کند. برخی از پژوهشگران دریافتند که انتخاب میزان بالاتری از چولگی برای سرمایه‌گذاران مطلوب‌تر است. لی[2] (۲۰۱۶)، از مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی به‌منظور انتخاب پرتفولیوی بهینه استفاده کرد و با به‌کارگیری الگوریتم فازی اقدام به حل مسئله بهینه‌سازی کرد. نتایج پژوهش وی بیانگر این بود که مدل ارائه شده نسبت به مدل مارکوویتز، کارایی بیشتری دارد؛ اما به‌علت نادیده گرفتن ویژگی عدم تقارن، توزیع آماری بازدهٔ دارایی‌ها در نحوهٔ محاسبهٔ ریسک پرتفولیو از کارایی لازم برخوردار نخواهد بود. ژانگ[3] (۲۰۰۹)، دریافت که بهره‌مندی از توزیع آماری دنباله‌های پهن، به‌منظور مدل‌سازی در بحث تخصیص بهینهٔ دارایی‌ها حائز اهمیت است. پیندوریا[4] (۲۰۱۴)، به ارائه مدل چند هدفهٔ میانگین ـ واریانس ـ کشیدگی برای تشکیل پرتفولیو و تخصیص بهینهٔ دارایی‌ها پرداخت و بیان کرد هنگامی که توزیع آماری برازش بازدهٔ دارایی‌ها نرمال نیست، اجرای مدل معرفی شده توسط وی، به ایجاد پرتفولیوی بهینه‌تری منجر می‌شود.

پژوهش‌هایی که تاکنون انجام شده مبین این نکتهٔ مهم است که گشتاورهای مراتب بالاتر مانند چولگی و کشیدگی نیز باید در مدل‌های بهینه‌سازی لحاظ شوند و به همین منظور، مدل‌های میانگین ـ واریانس ـ چولگی و میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی به‌منظور بهبود مدل‌های بهینه‌سازی پرتفولیو معرفی شدند (آردیتی[5]، ۱۹۷۱؛ سیموکویتز و بیدل[6]، ۱۹۷۸؛ کونو و سوزوکی[7]، ۱۹۹۲). با اینکه به‌کارگیری این معیارهای ریسک درمسئله بهینه‌سازی پرتفولیو بهبود

1. Samuelson
2. Li
3. Zhang
4. Pindoriya
5. Arditti
6. Simkowitz & Beedles
7. Konno & Suzuki

نسبی ایجاد کرد، همگی یک ایراد اساسی داشتند و آن بی‌توجهی به موضوع تنوع‌بخشی بود. یکی از معیارهای مناسبی که با توجه به میزان تنوع‌بخشی در پرتفولیو، می‌تواند برای سنجش ریسک به‌کار گرفته شود، آنتروپی است (ژانگ، لیو و شو[1]، ۲۰۱۲). آنتروپی به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی، در کنار معیارهای مختلف ریسک، می‌تواند باعث بهبود عملکرد مدل‌های مذکور شود. آنتروپی به‌عنوان معیار تصادفی بودن یا تنوع‌بخشی است که با وارد شدن به تابع هدف مسئله بهینه‌سازی پرتفولیو با افزایش تنوع‌بخشی، ریسک غیرسیستماتیک را کاهش می‌دهد و در نتیجه ریسک کل کاهش می‌یابد و از این جهت برای بهبود مدل مفید واقع خواهد شد. پژوهش‌های انجام شده، افزایش کارایی نتایج به‌دست‌آمده، هنگام به‌کارگیری آنتروپی به‌عنوان معیار ریسک را تأیید می‌کند (برا و پارک[2]، ۲۰۰۸). شانون[3] (۱۹۴۸)، اولین بار آنتروپی را به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی در مدل میانگین ـ انحراف مطلق (MAD) وارد مدل کرد. فیلیپاتوس (۱۹۷۲)، با باور به اینکه آنتروپی معیاری جامع‌تر از واریانس جهت سنجش ریسک در شرایطی است که توزیع آماری بازده‌ها نرمال نباشد، آنتروپی را جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه ارائه کرد. در واقع، افزایش آنتروپی منجر به تشکیل پرتفولیوی متنوع‌تر و توأم با ریسک کمتر می‌شود (فیلیپاتوس و ویلسون[4]، ۱۹۷۲). هوانگ[5] (۲۰۰۸)، از آنتروپی به‌عنوان معیار مناسب ریسکی که به توزیع آماری بازدهٔ دارایی‌ها بستگی ندارد، در پرتفولیوی فازی استفاده کرد و دریافت که برای توزیع‌های آماری نامتقارن (چوله) یا توزیع‌های آماری که نرمال نیستند، استفاده از آنتروپی به دستیابی به مرز بهینهٔ کاراتری نسبت به مدل کلاسیک مارکوویتز منجر می‌شود. جانا و همکارانش از آنتروپی به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی در تابع هدف مربوط به مسئله بهینه سازی پرتفولیو استفاده کردند (جانا، روی و مازومدر[6]، ۲۰۰۹).

وایول و ناروکی[7] (۲۰۱۶) معتقدند مدل‌هایی که گشتاور مراتب بالاتر و آنتروپی را توأمان مورد توجه قرار می‌دهند، از کارایی بالاتری در عمل برخوردارند. لی و ژانگ (۲۰۲۱)، به مطالعه و بررسی مدل میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی اقدام کردند؛ به‌طوری که در آن، میانگین به‌عنوان معیار اندازه‌گیری بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار بود و میزان ریسک با معیار واریانس اندازه‌گیری شد و میزان تنوع‌بخشی پرتفولیو توسط آنتروپی ارزیابی شد. لام و همکاران (۲۰۲۱)، از مدل انتخاب پرتفولیو مبتنی بر رویکرد میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی در دوره‌های زمانی قبل و بعد از کرونا، برای تعیین پرتفولیوی بهینه بهره گرفتند. نتایج اجرای مدل، کارایی خوب مدل پیشنهادی را نشان داد. در پژوهش آن‌ها، مدل بهینه‌سازی چند هدفه میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی[8]، به‌منظور دستیابی به پرتفولیوی بهینه و کاملاً متنوع مبتنی بر آنتروپی استفاده شده است. توابع هدف مدل مذکور عبارت بودند از: حداکثر بازده مورد انتظار، حداقل انحراف مطلق و حداکثر آنتروپی شانون پرتفولیو. افزایش آنتروپی به افزایش سطح تنوع‌بخشی منجر می‌شود و با افزایش سطح تنوع‌بخشی ریسک غیرسیستماتیک کاهش می‌یابد و به این دلیل در نظر گرفتن معیار آنتروپی جهت بهبود مدل میانگین ـ انحراف مطلق اولیه، مفید واقع شده است (لام و همکاران، ۲۰۲۱).

1. Zhang, Liu & Xu
2. Bera & Park
3. Shannon
4. Philippatos & Wilson
5. Huang
6. Jana, Roy & Mazumder
7. Viole & Nawrocki
8. Entropy- Mean-Absolute Deviation

پیشینه تجربی پژوهش

آکسارایلی و پالا[1] (۲۰۱۸)، در پژوهشی به ارائهٔ مدلی جهت بهینه‌سازی پرتفولیو با عنوان مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای برای بهینه‌سازی پرتفولیو مبتنی بر آنتروپی (با به کارگیری دو معیار آنتروپی مختلف شامل آنتروپی شانون و جینی ـ سیمپسون) و گشتاورهای مراتب بالاتر پرداختند. داده‌هایی که آن‌ها برای اجرای مدل به‌کار بردند، شامل بازده سهام موجود در شاخص سهام ترکیه بود. آن‌ها در این پژوهش دریافتند که مدل مبتنی بر معیار آنتروپی جینی ـ سیمپسون، از مدل سنتی عملکرد بهتری دارد. با وجود این، استفاده از آنتروپی شانون به تشکیل پرتفولیوی متنوع‌تری نسبت به آنتروپی جینی ـ سیمپسون منجر شده است.

کاسنباچر، لی و اوچوکانونچای[2] (۲۰۱۹)، در پژوهشی با عنوان «مدل میانگین ـ واریانس یا مدل میانگین ـ انحراف مطلق: عملکرد دو مدل بهینه‌سازی پرتفولیو»، یعنی میانگین ـ واریانس و میانگین ـ انحراف مطلق را مورد مطالعه قرار دادند. داده‌های به‌کار رفته در پژوهش آن‌ها، بازدهٔ سهام موجود در شاخص سهام آمریکایی و شاخص S&P500 بود. فرضیه پژوهش آن‌ها، بررسی ارجحیت مدل میانگین ـ انحراف مطلق بر مدل میانگین ـ واریانس در انتخاب پرتفولیوی بهینه بر اساس میزان بازده مدل‌های مذکور بود. با استفاده از معیار شارپ مشخص شد که مدل میانگین ـ انحراف مطلق از مدل میانگین ـ واریانس کاراتر است. در پژوهش آن‌ها، مدل میانگین ـ انحراف مطلق در سطح معینی از ریسک، به دستیابی به میزان بالاتری از بازده نسبت به مدل میانگین ـ واریانس منجر می‌شود.

لام و همکاران (۲۰۲۱)، مدل بهینه‌سازی پرتفولیو را با کاربست توأم مدل میانگین ـ انحراف مطلق و آنتروپی ارائه کردند. هدف پژوهش انجام شده توسط آن‌ها، تشکیل پرتفولیویی بود که منجر به حداقل ریسک مبتنی بر معیار ریسک انحراف مطلق و حداکثر آنتروپی به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی شود. رهیافت به‌کار برده شده در پژوهش آن‌ها، بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از روش بهینه‌سازی برنامه‌ریزی آرمانی است. داده‌های به‌کار رفته در پژوهش آن‌ها بازده سهام موجود در شاخص سهام نیویورک[3] برای شرایط قبل و بعد از کرونا است. نتایج اجرای مدل نشان داد که کاربرد توأم مدل میانگین ـ انحراف مطلق و آنتروپی نسبت به مدل میانگین ـ انحراف مطلق، به افزایش میزان بازدهٔ پرتفولیو منجر می‌شود و در نتیجه از عملکرد بهتری برخوردار است.

بهزادی و بختیاری (۱۳۹۳)، مدلی مبتنی بر میانگین ـ آنتروپی ـ چولگی برای بهینه‌سازی پرتفولیو ارائه کردند. در پژوهش آن‌ها، از داده‌های مربوط به بازدهٔ سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. نتایج اجرای مدل نشان داده است که مدل مبتنی بر میانگین ـ آنتروپی ـ چولگی دارای شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری نسبت به مدل سنتی است.

راعی، باجلان، حبیبی و نیکعهد (۱۳۹۶)، مدل بهینه‌سازی چندهدفه پرتفولیو مبتنی بر میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی و الگوریتم ازدحام ذرات را پیشنهاد کردند. داده‌های آماری پژوهش آن‌ها شامل بازده سه ماهانهٔ ۹۸ شرکت از بین شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران طی سال‌های ۱۳۹۳ تا ۱۳۹۵ است. برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی از

1. Aksarayli & Pala
2. Kasenbacher, Lee & Euchukanonchai
3. NYSE

الگوریتم ازدحام ذرات استفاده شده است. برای مقایسه مدل ارائه شده در پژوهش آن‌ها با مدل سنتی میانگین ـ واریانس مارکوویتز، شاخص شارپ پرتفولیوی حاصل از هر کدام از روش‌ها محاسبه شده است که نشان می‌دهد مدل پیشنهادی پژوهش (میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی) با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات نسبت به مدل میانگین ـ واریانس مارکوویتز کارایی بالاتری دارد.

نبی‌زاده و بهزادی (۱۳۹۷)، با درنظر گرفتن فرض غیرنرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها از طریق لحاظ کردن گشتاورهای مراتب بالاتر در مدل‌ها و همچنین درنظر گرفتن معیار آنتروپی به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی به ارائه مدل بهینه‌سازی پرتفولیو پرداختند. در پژوهش آن‌ها، رویکرد جدیدی با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله ای بر اساس مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی پیشنهاد شده است. در پژوهش آن‌ها، برای اندازه‌گیری آنتروپی از معیارهای شانون و جینی ـ سیمپسون استفاده شده است. برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی، روش برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای به کار برده شده است. برای نشان دادن کارایی رویکرد پیشنهادی از داده‌های مربوط به بازده ماهانه هشت صنعت منتخب در بورس اوراق بهادار تهران طی بازهٔ زمانی اسفند ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۶ استفاده شده است. نتایج حاصل از اجرای مدل، حاکی از کارایی بالاتر مدل پیشنهادی است.

دیده‌خانی، عباسی، شیری قهی و مشاری (۱۳۹۸)، در پژوهشی مدل میانگین ـ انحراف مطلق (MAD) را با فرض متغیر تصادفی فازی بودن بازدهٔ سهام و نیز لحاظ کردن نگرش سرمایه‌گذاران به ریسک در قالب سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز و ریسک‌پذیر ارائه کردند و مدلی کارا جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه معرفی کردند. در پژوهش آن‌ها، از بازده روزانه سهام ۱۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران، در قلمرو زمانی ۹۱/۳/۲۲ تا ۹۶/۳/۲۴ استفاده شده است. در پژوهش آن‌ها، از الگوریتم ژنتیک برای اجرای مدل پیشنهادی جهت تشکیل پرتفولیوی بهینه استفاده شده است. نتایج حاصل از اجرای مدل، مبین کارایی بالاتر مدل پیشنهادی است.

خندان (۱۴۰۲)، به مقایسه عملکرد مدل‌های بهینه‌سازی میانگین و میانه پرداخته است. در پژوهش وی مدل‌های متنوعی مبتنی بر بیشینه‌سازی میانه یا میانگین در کنار شاخص‌های مختلف ریسک ارائه و با داده‌های واقعی ۲۰ شرکت بورسی ایران از ابتدای سال ۲۰۱۶ تا انتهای سال ۲۰۱۹ مورد آزمون و مقایسه قرار گرفته‌اند. مهم‌ترین نتیجه به‌دست‌آمده از پژوهش وی، عملکرد بهتر میانه از نظر بازده است و مدل بهینه‌سازی میانه از نظر متنوع‌سازی نیز عملکرد بسیار خوبی دارد. علاوه‌براین، با به کارگیری شاخص‌های مختلف ریسک عملکرد مدل را از منظر کنترل ریسک و متنوع‌سازی مورد مقایسه قرار داده است. نتایج به دست آمده حاکی از این است که دو شاخص ریسک متوسط ارزش در معرض ریسک (CVAR) و میانگین انحرافات مطلق (MAD) از لحاظ کنترل ریسک و نیز متنوع‌سازی عملکرد بسیار بهتری داشته‌اند.

با بررسی پیشینه نظری و تجربی، مدلی مبتنی بر فرض توزیع آماری بازدهٔ دارایی‌ها با در نظر داشتن چولگی و کشیدگی در ساختار توزیع آماری و در عین حال با خواصی مشابه با توزیع نرمال مشاهده نشد. بر این اساس، پژوهش حاضر با مبنا قرار دادن مدل لام و همکاران (۲۰۲۱)، به‌عنوان جدیدترین مدل بهینه‌یابی پرتفولیو با رویکرد مبتنی بر آنتروپی، به برطرف کردن خلأ تئوریکی موجود در این مدل و بهبود آن اقدام خواهد کرد. مدل یادشده با وجود داشتن نقاط قوت فراوان، یک ضعف مهم دارد و آن، بی‌توجهی به ویژگی‌های آماری چولگی و کشیدگی است. این پژوهش

برای برطرف کردن این خلأ، کلاسی از توزیع‌های آماری چوله ـ متقارن مانند توزیع چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال در حالت خاص متقارن بودن توزیع نرمال (به‌عنوان حالت خاصی از توزیع چوله ـ نرمال) و لاپلاس (به‌عنوان حالت خاصی از توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال که در نتیجهٔ صفر شدن مقدار پارامتر چولگی توزیع‌های چوله ـ متقارن مذکور حاصل خواهد شد) را در نظر می‌گیرد. به عبارت دیگر هدف از انجام این پژوهش درنظر گرفتن توأم فرض غیرنرمال بودن توزیع بازدهٔ دارایی‌ها و ویژگی‌های آماری چولگی و کشیدگی در قالب توزیع‌های چوله ـ نرمال[1] و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال[2]، به‌عنوان توزیع آماری بازدهٔ دارایی‌ها و نیز لحاظ کردن آنتروپی شانون، به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی پرتفولیو و انحراف مطلق، به‌عنوان معیار ریسک به‌منظور بهینه‌سازی پرتفولیو در مدل مطرح شده توسط لام و همکاران (۲۰۲۱)، جهت دستیابی به پرتفولیوی بهینه است.

با توجه به پیشینه نظری و تجربی بیان شده و خلأ تئوریکی شناسایی شده، هدف از انجام این پژوهش آزمون فرضیهٔ زیر است:

مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال نسبت به توزیع چوله ـ نرمال از عملکرد بهتری در انتخاب پرتفولیوی بهینه برخوردار است.

روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش از حیث هدف، کاربردی است؛ زیرا فعالان بازار سرمایه و سرمایه‌گذاران و همهٔ کسانی که به‌نحوی با بازار سرمایه سروکار دارند، می‌توانند از نتایج آن برای تخصیص بهینهٔ دارایی‌ها بهره‌مند شوند. از نظر نوع مطالعه به‌لحاظ زمان، گذشته‌نگر است و از حیث جمع‌آوری نوع داده‌ها، به‌دلیل عدم مداخله و دست‌کاری در داده‌ها، غیرآزمایشی و به‌لحاظ بهره‌بردن از تجزیه‌وتحلیل‌های آماری در ارتباط با توصیف داده‌ها و اجرای مدل برای دستیابی به نتایج، کمی است. پژوهش حاضر از منظر ماهیت و روش اجرا، توصیفی است. اجرای پژوهش توصیفی می‌تواند فقط برای شناخت شرایط موجود و در جهت بهبود فرایند تصمیم‌گیری باشد. برای جمع‌آوری اطلاعات آن بخش از داده‌های پژوهش که مربوط به مبانی نظری پژوهش است، از مقالات و مجلات تخصصی فارسی و لاتین استفاده شده است.

برای بخش دیگر پژوهش یعنی داده‌ها و اطلاعات مالی مورد نیاز برای اجرای مدل بهینه‌سازی، از نرم‌افزار ره‌آورد نوین استفاده شده است. پژوهش حاضر در یک بازهٔ زمانی ۳۶ ماهه از فروردین ۱۳۹۸ تا اسفند ۱۴۰۰ انجام شده است. داده‌های مورد استفاده در این پژوهش، قیمت پایان ماه سهام و مصوبات مجامع شرکت‌ها بوده است که از آرشیوهای آماری سازمان بورس و اوراق بهادار تهران استخراج شده است. جامعهٔ آماری پژوهش، کلیه شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران با اعمال محدودیت‌های زیر بوده است.

۱. جزء شرکت‌های سرمایه‌گذاری نباشند.
۲. وقفه‌ای بیش از ۶ ماه متوالی در معاملات آن‌ها وجود نداشته باشد.

پس از اعمال فیلترهای دوگانه، ۳۳۸ شرکت به‌عنوان جامعه آماری باقی ماندند که به‌کمک جدول مورگان متناظر با

1. Skew- Normal Distribution
2. Skew- Laplace- Normal Distribution

فرمول کوکران[1]، حدود ۱۸۱ نماد بورسی پس از تخصیص کد به نمادها، به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و با استفاده از دستور sample در نرم‌افزار آر، به‌عنوان نمونه آماری منتخب پژوهش تعیین شدند.

متغیرها و نحوهٔ محاسبهٔ آن‌ها

متغیر مورد استفاده در این پژوهش، بازدهٔ سهام است که طبق رابطهٔ ۱ محاسبه می‌شود (راعی و پویان فر، ۱۳۹۶: ۶۱۲).

$$R_t = \frac{(p_t - p_{t-1}) + D_t}{p_{t-1}}$$ رابطهٔ ۱)

که در آن، R_t نماد بازده؛ D_t سود تقسیمی سهام عادی در دورهٔ t؛ p_t نماد قیمت تعدیل شدهٔ سهام (که در آن مصوبات مجامع شرکت‌ها لحاظ شده است) در زمان t و p_{t-1} نماد قیمت تعدیل شدهٔ سهام در زمان t −۱ است.

مدل انجام پژوهش

پژوهش مذکور طی سه مرحله صورت می‌گیرد، این مراحل شامل برازش توزیع بازده‌ها، انتخاب پرتفولیوی بهینه با رویکرد مبتنی بر میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی و در نهایت مقایسه عملکرد پرتفولیوهای انتخابی با توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال است.

مرحلهٔ اول: برازش توزیع بازده‌ها

اکثر تحلیل‌های آماری متناظر با مباحث بهینه‌سازی مالی بر اساس فرض نرمال بودن توزیع بازده‌ها انجام می‌گیرد. در حالی که در بسیاری از موارد، توزیع بازده‌ها نامتقارن بوده و در نتیجه تحلیل این مجموعه از بازده‌ها با استفاده از توزیع نرمال، ممکن است خیلی مناسب نباشد. در چنین مواقعی معمولاً سعی می‌شود ابتدا با استفاده از تبدیلی مناسب، توزیع بازده‌ها را تا حد امکان به توزیع نرمال نزدیک کرده و سپس به تحلیل آن‌ها پرداخت. اما این روش خود با دشواری‌هایی از جمله چگونگی انتخاب تبدیل مناسب و اریبی برآوردگرها مواجه است. بنابراین در چنین مواردی، توزیع چوله ـ نرمال که توزیعی نامتقارن است، می‌تواند در تحلیل این داده‌ها نقش اساسی ایفا کند. دلایل استفاده از توزیع چوله ـ نرمال، در برداشتن توزیع نرمال به‌عنوان حالت خاص و همچنین داشتن پارامترهایی برای کنترل چولگی و کشیدگی ذکر شده است. آزالینی[2] (۱۹۸۵)، نشان داد که مقدار ضریب چولگی و ضریب کشیدگی برای این توزیع محدود است و این مسئله می‌تواند به‌عنوان ضعفی برای این توزیع تلقی شود؛ زیرا برای داده‌هایی که کشیدگی شدیدی دارند، کاربردی نیست. برای رفع این مشکل، توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال (گوپتا، چانگ و هانگ[3]، ۲۰۰۳)، معرفی می‌شود که دارای ضریب کشیدگی با دامنهٔ وسیع‌تری نسبت به توزیع چوله ـ نرمال آزالینی است و از طرفی توزیع لاپلاس[4] را به‌عنوان حالت خاص در بردارد که توزیع مذکور از کشیدگی بیشتری در مقایسه با توزیع نرمال برخوردار است. ویژگی مطلوب دیگر توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال، تک مدی بودن آن‌هاست.

1. Cochran
2. Azzalini
3. Gupta, Chang & Huang
4. Laplace Distribution

توزیع چوله ـ نرمال

انتخاب توزیع برازش[1] مناسب، یکی از مفاهیم اساسی در تحلیل‌های آماری[2] است. آزالینی (۱۹۸۵) در مواقعی که داده‌ها نامتقارن هستند، توزیع چوله ـ نرمال استاندارد را با تابع چگالی احتمال برای تحلیل داده‌ها معرفی کرد که در آن $\lambda\epsilon\mathbb{R}$ نماد پارامتری جهت کنترل چولگی است (رابطهٔ ۲).

$$f(z;\lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), \qquad z\epsilon\mathbb{R}, \qquad \lambda\epsilon\mathbb{R}$$ رابطهٔ ۲)

در این صورت گفته می‌شود که $Z\sim SN(\lambda)$، به عبارت دیگر می‌توان گفت که متغیر تصادفی Z دارای توزیع چوله ـ نرمال استاندارد است. اگر پارامتر چولگی برابر با صفر باشد در حالت خاص توزیع چوله ـ نرمال استاندارد به توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌شود (رابطهٔ ۳)

$$f(z;\lambda) = \phi(z), \qquad \lambda = 0$$ رابطهٔ ۳)

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}, \qquad z\epsilon\mathbb{R}$$ رابطهٔ ۴)

اگر $Z\sim SN(\lambda)$ در این صورت امید ریاضی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\ ; \qquad z\epsilon\mathbb{R}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$$ رابطهٔ ۵)

آزالینی (۱۹۸۵)، نشان داد چولگی این توزیع بین (۰/۹۹۵ و ۰/۹۹۵-) و کشیدگی آن بین (۰/۸۶۹ و ۰/۸۶۹-) است و این محدودیت، به‌عنوان نقطهٔ ضعف این توزیع تلقی می‌شود؛ زیرا برای مجموعه‌ای از داده‌ها که چولگی یا کشیدگی شدیدی داشته باشند، کاربرد ندارد. در حالت کلی گفته می‌شود متغیر تصادفی Z دارای توزیع چوله نرمال است اگر تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(z;\lambda) = 2\phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right); \qquad z\epsilon\mathbb{R}, \mu\epsilon\ \mathbb{R}, \sigma \geq 0, \lambda\epsilon\mathbb{R}$$ رابطهٔ ۶)

که در آن μ نماد پارامتر مکان[3] و σ نماد پارامتر مقیاس[4] و λ نماد پارامتر چولگی است و به‌صورت $Z\sim SN(\mu,\sigma,\lambda)$ نشان داده می‌شود.

اگر $Z\sim SN(\mu,\sigma,\lambda)$ باشد در این صورت امید ریاضی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Z) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\ ; \qquad z\epsilon\mathbb{R};\ \mu\epsilon\ \mathbb{R};\ \sigma \geq 0, \lambda\,\epsilon\mathbb{R}$$ رابطهٔ ۷)

1. Fitting Distribution
2. Statistical Analysis
3. Location Parameter
4. Scale Parameter

توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال

تابع چگالی احتمال توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال به‌صورت زیر است (گوپتا و همکاران، ۲۰۰۳):

رابطهٔ ۸) $$f(z;\lambda) = 2\,\psi(z)\Phi(\lambda z), \qquad z\epsilon\mathbb{R}\,,\lambda\epsilon\mathbb{R}$$

رابطهٔ ۹) $$f(z;\lambda) = \psi(z), \qquad \lambda = 0$$

رابطهٔ ۱۰) $$\psi(z) = \frac{1}{2}\,e^{-|z|}\,, z\epsilon\mathbb{R}$$

که در آن $\psi(z)$ بیانگر تابع چگالی احتمال توزیع لاپلاس و Φ بیانگر تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. در این صورت گفته می‌شود که $Z\sim SLN(\lambda)$، به عبارت دیگر می‌توان گفت که متغیر تصادفی Z دارای توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال استاندارد است. اگر $Z\sim SLN(\lambda)$ باشد، در این صورت امید ریاضی آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

رابطهٔ ۱۱) $$E(Z) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,; \qquad z\epsilon\mathbb{R}, \epsilon\lambda\mathbb{R}$$

و در حالت کلی گفته می‌شود که متغیر تصادفی Z دارای توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

رابطهٔ ۱۲) $$f(z;\lambda) = 2\;\psi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right); \qquad z\epsilon\mathbb{R}, \mu\epsilon\,\mathbb{R}, \sigma \geq 0, \lambda\epsilon\mathbb{R}$$

که در آن μ نماد پارامتر مکان و σ نماد پارامتر مقیاس و λ نماد پارامتر چولگی است و به‌صورت $Z\sim SLN(\mu,\sigma,\lambda)$ نشان داده می‌شود. اگر $Z\sim SLN(\mu,\sigma,\lambda)$ باشد در این صورت امید ریاضی آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

رابطهٔ ۱۳) $$E(Z) = \mu + \sigma\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,; \qquad z\epsilon\mathbb{R};\ \mu\epsilon\,\mathbb{R};\ \sigma \geq 0, \epsilon\lambda\mathbb{R}$$

مرحله دوم: انتخاب پرتفولیوی بهینه با رویکرد مبتنی بر میانگین ــ انحراف مطلق ــ آنتروپی

جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه با رویکرد مبتنی بر میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی از روش زیر تبعیت می‌شود. قبل از معرفی روش مذکور لازم است که ابتدا متغیرهای مورد استفاده در آن معرفی شوند. جدول ۱ متغیرهای مورد استفاده در مدل و نمادهای مربوط به آن‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱. متغیرهای مورد استفاده در مدل و نمادهای مربوطه

نمادها	توصیف
R_j	بازدهٔ دارایی j ام
x_j	وزن دارایی j ام
ρ	حداقل بازدهٔ مورد انتظار سرمایه‌گذار
$R(x)$	میانگین بازدهٔ پرتفولیو
$w(x)$	انحراف مطلق پرتفولیو
$H(x)$	آنتروپی پرتفولیو
R^*	مقدار بهینهٔ میانگین بازدهٔ پرتفولیو
w^*	مقدار بهینهٔ انحراف مطلق پرتفولیو
d_1	تفاضل میانگین بازدهٔ پرتفولیو از مقدار بهینه
d_2	تفاضل انحراف مطلق پرتفولیو از مقدار بهینه
d_3	تفاضل آنتروپی پرتفولیو از مقدار بهینه

تابع ریسک انحراف مطلق توسط (کونو و یامازاکی، ۱۹۹۱)، به‌عنوان جایگزینی مناسب برای معیار ریسک انحراف معیار معرفی شده توسط مارکوویتز پیشنهاد شده است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W(x) = E\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right)\right| \quad \text{رابطهٔ ۱۴)}$$

پرتفولیوی بهینهٔ مبتنی بر مدل میانگین ـ انحراف مطلق، پرتفولیویی است که به حداقل‌سازی $W(x)$ منجر شود. مدل میانگین ـ انحراف مطلق معادل جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه عبارت است از (لام و همکاران، ۲۰۲۱):

$$\min_x \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T} \quad \text{رابطهٔ ۱۵)}$$

که در آن:

$$y_t + \sum_{t=1}^{T} a_{it} x_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{رابطهٔ ۱۶)}$$

$$y_t - \sum_{t=1}^{T} a_{it} x_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{رابطهٔ ۱۷)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad \text{رابطهٔ ۱۸)}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$ رابطهٔ ۱۹)

$$\sum_{j=1}^{n} E(R_j)\, x_j \geq \rho$$ رابطهٔ ۲۰)

متغیر R_j و x_j به‌ترتیب نماد بازدهٔ سهم j و وزن سهم j در پرتفولیو، ρ نماد بازدهٔ هدف سرمایه‌گذار است. مقدار r_{jt} مقدار مشاهده شده R_j، r_j میانگین بازدهٔ سهم j و $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ است.

معیار آنتروپی در مدل $H(x)$ به‌عنوان معیاری برای میزان تصادفی بودن یا به عبارت دیگر تنوع‌بخشی، به‌صورت تابعی از وزن سهام موجود در پرتفولیو یعنی $x_1, \dots, x_n$ است که حداکثر مقدار آن $\ln n$ است، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{H}(x) = -\sum_{j=1}^{n} x_j \ln x_j$$ رابطهٔ ۲۱)

$$x_j = \frac{1}{n}, \qquad j = 1, \dots, n$$

پرتفولیویی که شامل سهام با وزن یکسان $\frac{1}{n}$ است، پرتفولیوی معیار[1] یا پرتفولیوی با وزن یکسان سهام نامیده می‌شود. علاوه بر این تابع آنتروپی مشکل وزن یا نسبت سرمایه‌گذاری کرانی سهم خاصی در پرتفولیو را که مسئلهٔ نادیده گرفته شدن تنوع بخشی پرتفولیو را موجب می‌شود، رفع می‌کند. میزان بالای آنتروپی پرتفولیو در واقع مبین میزان بالای تنوع‌بخشی پرتفولیو است. افزایش تنوع‌بخشی موجب کاهش ریسک غیرسیستماتیک و در نتیجه کاهش ریسک پرتفولیو می‌شود. مدل بهینه‌سازی مذکور به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$max \;\; R(x) = \sum_{j=1}^{n} E[R_j] x_j$$ رابطهٔ ۲۲)

$$min \;\; w(x)$$ رابطهٔ ۲۳)

$$max \;\; H(x)$$ رابطهٔ ۲۴)

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$ رابطهٔ ۲۵)

$$x_j \geq 0\,, \quad j = 1, 2, \dots, n$$ رابطهٔ ۲۶)

با فرض برقراری رابطه‌های ۲۵ و ۲۶ مقدار بهینهٔ میانگین بازدهٔ پرتفولیو R^* عبارت است از:

1. Benchmark Portfolio

$$max\ R(x)$$ رابطهٔ ۲۷)

و نیز با فرض برقراری رابطه‌های ۲۵ و ۲۶، مقدار بهینهٔ انحراف مطلق پرتفولیو w^* نیز برابر است با:

$$min\, w(x)$$ رابطهٔ ۲۸)

بهینه‌سازی پرتفولیو[1] مبتنی بر رهیافت میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی منجر به مسئلهٔ بهینه‌سازی سه هدفه حداکثرسازی میانگین بازده، حداقل‌سازی انحراف مطلق و حداکثرسازی آنتروپی می‌شود. فرض کنید R^* و W^* به‌ترتیب نماد متناظر حداکثر میانگین بازده و حداقل انحراف مطلق برای توابع هدف متناظرشان هستند. در این صورت یافتن وزن سهام موجود در پرتفولیوی بهینه مبتنی بر رهیافت میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی با به‌کارگیری روش بهینه‌سازی برنامه‌ریزی آرمانی[2] (تای و لئونارد[3]، ۱۹۸۸)، زیر امکان‌پذیر است:

$$\min_x Z = \left|\frac{d_1}{R^*}\right| + \left|\frac{d_2}{w^*}\right| + \left|\frac{d_3}{ln\, n}\right|$$ رابطهٔ ۲۹)

که در آن

$$R(x) + d_1 = R^*$$ رابطهٔ ۳۰)

$$W(x) - d_2 = W^*$$ رابطهٔ ۳۱)

$$H(x) + d_3 = \ln n$$ رابطهٔ ۳۲)

که در آن متغیرهای d_1، d_2 و d_3 نماد میزان انحراف از مقادیر بهینه مربوط به میانگین بازدهٔ پرتفولیو، انحراف مطلق و آنتروپی هستند، به این شرط که رابطه‌های ۲۵ و ۲۶ برقرار باشند.

مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی در حالت فروش استقراضی قابل کاربرد نیست، چون حالت تعمیم‌یافتهٔ مدل میانگین ـ انحراف مطلق است (کونو و یامازاکی، ۱۹۹۱) و مبتنی بر آنتروپی تعریف شده توسط (شانون، ۱۹۴۸) است که در هر دو حالت الزاماً وزن دارایی‌های تشکیل‌دهنده پرتفولیو باید مثبت باشد و این بیانگر محدودیت مدل‌های مذکور است. در این پژوهش مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی به مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی مبتنی بر لحاظ کردن فرض توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال برای بازده‌ها تعمیم داده می‌شود و در نهایت بهترین مدل بر اساس معیار نسبت عملکرد جهت تشکیل پرتفولیوی بهینه مشخص می‌شود.

1. Portfolio Optimization
2. Goal Programming
3. Tayi & Leonard

مرحله سوم: مقایسه عملکرد مدل

عملکرد مدل مطرح شده با استفاده از نسبت میانگین بازدهٔ پرتفولیو به انحراف مطلق پرتفولیو در رابطه زیر حاصل می‌شود. نسبت عملکرد بالاتر در نتیجهٔ میانگین بازدهٔ بالاتر یا انحراف مطلق کمتر حاصل می‌شود.

$$\text{نسبت عملکرد} = \frac{\text{میانگین بازدهٔ پرتفولیو}}{\text{انحراف مطلق پرتفولیو}} \quad \text{رابطهٔ ۳۳)}$$

محاسبات مربوط به مدل میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی مبتنی بر توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال با استفاده از نرم‌افزار آر انجام می‌شود.

روش آزمون فرضیه

پس از برازش توابع چگالی متناظر با توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال به بازده‌ها و یافتن برآوردهای حداکثر درست‌نمایی توزیع‌های برازش با استفاده از بستهٔ نرم‌افزاری استاس و دستور optim در نرم‌افزار آر و بررسی پایایی برآوردهای به‌دست‌آمده با به‌کارگیری روش نمونه‌گیری بوت استرپ با تعداد تکرار ۱۰۰۰ بار، روابط ۷ و ۱۳ به روش عددی تخمین‌زده خواهند شد. سپس با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده از روابط ۷ و ۱۳، در مدل بهینه‌سازی چند هدفهٔ میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی مبتنی بر توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال معرفی شده در این پژوهش و یافتن مقادیر بهینهٔ توابع هدف و با استفاده از روش بهینه‌سازی برنامه‌ریزی آرمانی، نسبت‌های سرمایه‌گذاری سهام یا یه عبارت دیگر وزن سهام منتخب تعیین خواهند شد؛ به‌نحوی که به حداکثر بازدهی و حداقل ریسک انحراف مطلق منجر شود. در نهایت مدل‌های معرفی شده در این پژوهش بر اساس معیار نسبت عملکرد[1] مقایسه می‌شوند.

یافته‌های پژوهش

آماره‌های توصیفی بازده‌های ماهانهٔ سهام متناظر با نمادهای بورسی نمونه‌ای (۱۸۱ نماد بورسی) مورد مطالعه در این پژوهش شامل میانگین، انحراف معیار، چولگی و کشیدگی با استفاده از نرم‌افزار آر استخراج شد. همان‌طور که در جدول۲ ملاحظه می‌شود، نماد «وآذر» بیشترین میانگین و نماد «پارند» کمترین میانگین بازدهی ماهانه را دارند. نماد «خساپا» بیانگر حداکثر انحراف معیار و نماد «پارند» بیانگر حداقل انحراف معیار است. نماد «بساما» دارای بیشترین میزان چولگی و در عین حال بیشترین میزان کشیدگی است. نماد «شپنا» دارای کمترین میزان چولگی و نماد «کرازی» دارای کمترین میزان کشیدگی در توزیع بازدهی ماهانه است. همان‌طور که از مقادیر مشاهده شدهٔ آماره‌های توصیفی بازده‌های ماهانهٔ سهام متناظر با نمادهای بورسی نشان داده شده در جدول ۲ استنباط می‌شود که برخی از سهم‌ها از مقادیر معیارهای چولگی و کشیدگی متفاوتی در مقایسه با توزیع نرمال برخوردارند؛ برای مثال میزان چولگی نماد «شپنا» حتی منفی است که نشان می‌دهد توزیع بازدهی متناظر با این نماد چوله به چپ است. نمونهٔ دیگر، میزان کشیدگی توزیع بازدهی نماد «بساما» خیلی زیادتر از کشیدگی توزیع نرمال است که هر دو نمونه، بیانگر این موضوع است که توزیع نرمال توزیع

1. Performance Ratio

برازش مناسبی برای تبیین توزیعی بازده‌های ماهانه نیست و بهتر است از توزیع‌هایی که به‌نحوی دارای پارامترهایی جهت تبیین میزان چولگی و کشیدگی توزیع بازده‌ها هستند، استفاده شود. توزیع‌های آماری پیشنهادی در این پژوهش، توزیع‌های آماری چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال هستند، به این دلیل که هم خواصی مشابه با توزیع نرمال و در حالت کلی توزیع‌های متقارنی مانند توزیع لاپلاس دارند و هم از ویژگی مطلوب تک مدی بودن برخوردارند و هم پارامترهایی جهت کنترل میزان کشیدگی و چولگی توزیع بازده‌ها در برمی‌گیرند.

جدول ۲. حداکثر و حداقل آماره‌های توصیفی متناظر با نمادهای بورسی

نماد بورسی	آمارهٔ توصیفی[1]	مقدار آمارهٔ توصیفی
وآذر	حداکثر میانگین	۱۵/۱۳۵۳
پارند	حداقل میانگین	۰/۰۳۳۱
خساپا	حداکثر انحراف معیار	۳۵/۱۶۷۶
پارند	حداقل انحراف معیار	۲/۶۲۴۶
بساما	حداکثر چولگی	۳/۴۶۷۶
شپپا	حداقل چولگی	−۰/۴۵۱۰
بساما	حداکثر کشیدگی	۱۸/۴۴۳۱
کرازی	حداقل کشیدگی	۱/۸۷۹۴

پس از اجرای برنامهٔ آر متناظر با مدل‌های پیشنهادی ارائه شده در این پژوهش، نتایج به‌صورت زیر به‌دست آمد: همان‌طور که از جدول ۳ ملاحظه می‌شود، مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال، در مقایسه با مدل متناظر مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال عملکرد بهتری دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اگرچه میزان بازدهی پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال، در حالت وزن‌های متفاوت یا نسبت سرمایه‌گذاری متفاوت سهام (۷/۰۱۸۴) به مقدار ۰/۰۹۲۸ درصد بیشتر از میزان بازدهی پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال (۶/۹۲۵۶) است؛ اما چون میزان ریسک انحراف مطلق پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال، در این حالت ۱۶/۲۵۸۱ درصد به مقدار ۱۵/۰۶۳۷ درصد بیشتر از میزان ریسک انحراف مطلق پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال (۱/۱۹۴۴ درصد) است (جدول ۳)، در نتیجه مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال در حالت نسبت سرمایه‌گذاری یا وزن متفاوت سهام از مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال بر اساس معیار مقایسهٔ نسبت عملکرد، از عملکرد بهتری برخوردار است (جدول ۴).

جدول ۳. نتایج میانگین بازدهٔ پرتفولیو و ریسک انحراف مطلق پرتفولیوی مدل‌ها

مدل‌ها	میانگین بازدهٔ پرتفولیو	ریسک انحراف مطلق پرتفولیو
مدل میانگین ـ انحراف مطلق– آنتروپی (چوله– نرمال با وزن متفاوت سهام)	۷/۰۱۸۴	۱۶/۲۵۸۱
مدل میانگین ـ انحراف مطلق– آنتروپی (چوله– لاپلاس– نرمال با وزن متفاوت سهام)	۶/۸۷۳۴	۱/۱۹۴۴

1. Descriptive Statistics

جدول ٤. نتایج معیار مقایسهٔ نسبت عملکرد مدل‌ها

توزیع آماری	میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی (وزن متفاوت سهام)
توزیع چوله ـ نرمال	۰/۴۳۱۷
توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال	۵/۷۵۴۵

بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش به مطالعه و بررسی عملکرد مدل‌های میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال و چوله ـ لاپلاس ـ نرمال به‌منظور تشکیل پرتفولیوی بهینه پرداخته شد. داده‌های به‌کار رفته در این پژوهش، بازده‌های ماهانهٔ ۱۸۱ نماد بورسی نمونه‌ای (متناظر با ۳۳۸ نماد بورسی جامعه مورد بررسی که با استفاده از جدول مورگان و بر اساس فرمول کوکران جهت تعیین حجم نمونه به‌دست آمد) سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس سهام و اوراق بهادار تهران است. یافته‌های پژوهش حاکی از این است که مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال در حالت نسبت سرمایه‌گذاری (وزن متفاوت) از مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ نرمال از نسبت عملکرد بالاتری برخوردار بوده و در نتیجه مطلوب‌تر است و به پرتفولیوی بهینه‌تری منجر می‌شود که این به‌دلیل لحاظ کردن هر دو معیار چولگی و کشیدگی در مدل مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال است و بر اساس آماره‌های توصیفی نمادها میزان کشیدگی اغلب نمادهای بورسی قابل ملاحظه است. این نتیجه با یافته‌های آکسارایلی و پالا (۲۰۱۸)، با درنظر گرفتن ترکیبی از گشتاورهای مراتب بالاتر (چولگی و کشیدگی) و آنتروپی حاصل شده است، مطابقت می‌کند. همچنین نتایج این پژوهش به‌دلیل لحاظ کردن معیار آنتروپی به‌عنوان معیار تنوع‌بخشی با یافته‌های راعی، باجلان و هبیبی (۱۳۹۶)، برا و پارک (۲۰۰۸) و لام و همکاران (۲۰۲۱)، مطابقت می‌کند. آن‌ها نیز نشان دادند که پرتفولیوی حاصل از درنظر گرفتن آنتروپی، به‌دلیل مدنظر قرار دادن ویژگی تنوع‌بخشی به بهبود مدل کمک کرده است.

از آنجا که با بررسی انجام شده مشخص شد که توزیع بازده سهام در بورس اوراق بهادار تهران دارای توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال است، بنابراین به سرمایه‌گذاران، مشاوران و تحلیلگران مالی پیشنهاد می‌شود که جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه در رویکرد مبتنی بر میانگین ـ انحراف مطلق ـ آنتروپی، از روش مبتنی بر توزیع چوله ـ لاپلاس ـ نرمال استفاده کنند.

همچنین به محققان آتی توصیه می‌شود که به بررسی مدل‌های پیشنهادی این پژوهش با سایر معیارهای آنتروپی، از جمله آنتروپی جینی ـ سیمپسون و آنتروپی رنی و... و نیز مقایسهٔ نتایج حاصل از به‌کارگیری آن‌ها با معیار آنتروپی شانون بپردازند. همچنین پیشنهاد می‌شود که مدل‌های این پژوهش با سایر روش‌های بهینه‌سازی، از جمله روش بهینه‌سازی اسکالرسازی و الگوریتم‌های فرا ابتکاری و... بررسی شود.

اصلی‌ترین محدودیت پژوهش حاضر این است که مدل‌های مورد استفاده در پژوهش با فرض عدم امکان فروش استقراضی بوده است که این باعث می‌شود به‌کارگیری مدل در عمل با چالش مواجه شود.

منابع

بهزادی، عادل و بختیاری، مصطفی (۱۳۹۳). ارائه مدلی بر مبنای میانگین ـ آنتروپی ـ چولگی برای بهینه‌سازی سبد سهام در محیط فازی. *مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۵(۱۹)، ۳۹-۵۵.

خندان، عباس (۱۴۰۲). مقایسه عملکرد میانگین با میانه و دیگر شاخص‌های ریسک در بهینه‌سازی سبد سهام. *فصلنامه علمی پژوهشی اقتصاد مقداری*، ۲۰(۱)، ۹۹- ۱۳۸.

دیده‌خانی، حسین؛ عباسی، ابراهیم؛ شیری قهی، امیر و مشاری، محمد (۱۳۹۸). توسعه مدل بهینه‌سازی پرتفوی میانگین ـ انحراف مطلق (MAD) با رویکرد عدم قطعیت ترکیبی تصادفی ـ فازی و در نظر گرفتن نگرش سرمایه‌گذاران به ریسک. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۱۰(۴۰)، ۸۴-۱۰۲.

راعی، رضا و پویان‌فر، احمد (۱۳۹۸). *مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته*. تهران: انتشارات سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت).

راعی، رضا؛ باجلان، سعید؛ حبیبی، مصطفی و نیکعهد، علی (۱۳۹۶). بهینه‌سازی پرتفوی چندهدفه براساس میانگین، واریانس، آنتروپی و الگوریتم ازدحام ذرات. *مدل‌سازی ریسک و مهندسی مالی*، ۲(۳)، ۳۶۲- ۳۷۹.

نبی‌زاده، احمد و بهزادی، عادل (۱۳۹۷). گشتاور مراتب بالاتر در بهینه‌سازی پرتفوی با در نظر گرفتن آنتروپی و استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای. *تحقیقات مالی*، ۲۰(۲)، ۱۹۱-۲۰۸.

References

Aksarayli, M. & Pala, O. (2018). A polynomial goal programming model for portfolio optimization based on entropy and higher moments. *Expert System Applied*, 94, 185-192.

Arditti, F.D. (1971). Another look at mutual fund performance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6(3), 909-912.

Azzalini, A. (1985). A Class of Distribution which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 171-178.

Behzadi, A. & Bakhtiari, M. (2013). Presenting a model based on mean- entropy- skewness for stock portfolio optimization in fuzzy environment. *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 5(19), 39-55. (*in Persian*)

Bera, A.K. & Park, S.Y. (2008). Optimal Portfolio Diversification Using the Maximum Entropy Principle. *Econometric Reviews*, 27(15), 484-512.

Choi, B.G., Rujeerapaiboon, N. & Jiang, R. (2016). Multi- period portfolio optimization: Translation of autocorrelation risk to excess variance. *Operations Research*, 44(6), 801-807.

Dedekhani, H., Abbasi, E., Shiri Qahi, A. & Meshari, M. (2018). Development of mean-absolute deviation (MAD) portfolio optimization model with random- fuzzy mixed uncertainty approach and considering investors attitude to risk. *Financial Engineering and Securities Management*, 10(40), 84-102. (*in Persian*)

Erdas, M.L. (2020). Developing a portfolio optimization model based on linear programming under certain constraints: An application on Borsa Istanbul 30 Index. *TESAM Akademi Dergisi-Turkish Journal of TESAM Academy*, 7(1), 115-141.

Gupta, A.K., Chang, F.C. & Huang, W.J. (2003). Some skew-symmetric models. *Random Operators Stochastic Equations*, 10, 133-140.

Huang, X. (2008). Mean- Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(21): 170-176.

Jana, P., Roy, T.K. & Mazumder, S.K. (2009). Multi-objective possibility model for portfolio selection with transaction cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228, 188-196.

Kasenbacher, G., Lee, J. & Euchukanonchai, K. (2019). *Mean-variance vs. mean-absolute deviation: A performance comparison of portfolio optimization models*. University of British Columbia, Vancouver BC, Canada, Thesis.

Khandan, A. (2023). Comparing the performance of Median or Mean and other risk indicators in Portfolio Optimization. *Quarterly Journal of Quantitative Economics*, *20*(1), 99-138.

Konno, H. & Suzuki, K.I. (1992). A fast algorithm for solving large scale mean-variance models by compact factorization of covariance matrices. *Journal of the operations research society of Japan*, 35 (1), 93-104.

Konno, H. & Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market. *Management Science*, 37, 519-531.

Lam, W.S., Lam, W.H. & Jaaman, S.H. (2021). Portfolio Optimization with a Mean- Absolute Deviation- Entropy Multi- Objective Model. *Entropy*, 23(10), 1266.

Li, B. & Zhang, R. (2021). A new mean-variance-entropy model for uncertain portfolio optimization with liquidity and diversification. *Chaos Solitons Fractals*, 146: 1-6.

Li, D. (2016). Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Meanvariance Formulation. *Mathematical Finance,* 10(5), 387-406.

Lu, S., Zhang, N. & Jia, L. (2021). A multiobjective multiperiod mean-semientropy-skewness model for uncertain portfolio selection. *Applied Intelligence*, 51, 5233-5258.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7, 77-91.

Nabizadeh, A. & Behzad, A. (2018). Higher Moments Portfolio Optimization Considering Entropy based on Polynomial Idealistic Programming. *Financial Research Journal*, 20(2), 191-208. (*in Persian*)

Philippatos G. & Wilson, C. (1972). Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 4(3), 209-220.

Pindoriya, N. (2014). Multi-Objective Mean- variance- skewness Model for Generation Portfolio Allocation in Electricity Markets. *Electric Power Systems Research*, 80(10): 1314-1321.

Raei, R., Bajelan, S., Habibi, M., & Nikahd, A. (2017). Optimization of Multi-Objective Portfolios Based on Mean, Variance, Entropy and Particle Swarm Algorithm. Quarterly *Journal of Risk Modeling and Financial Engineering*, 2(3), 362-379. (*in Persian*)

Rai, R. & Poyanfar, A. (2018). *Advanced investment management*. Tehran: Publications of the Organization for the Study and Compilation of Humanities Books in Universities (Samt). (*in Persian*)

Samuelson, P.A. (1970). The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means variances and higher moments. *The Review of Economic Studies*, 37(4), 537-542.

Shannon, C.E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal*, 27, 379-423.

Simkowitz, M.A. & Beedles, W.L. (1978). Diversification in a three-moment world. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(5), 927-941.

Sun, Y.F., Aw, G., Loxton, R. & Teo, K.L. (2017). Chance-constrained optimization for pension fund portfolios in the presence of default risk. *European Journal of Operational Research*, 256(1), 205-214.

Tayi, G.K. & Leonard, P.A. (1988). Bank balance- sheet management: An alternative multiobjective model. *Journal of the Operational Research Society*, 39(4), 401-410.

Viole, F. & Nawrocki, D. (2016). Predicting risk/return performance using upper partial moment/lower partial moment metrics. *Journal of Mathematical Finance*, 6(5), 900-920.

Zhang, W.G., Liu, Y.j. & Xu, W.J. (2012). A Possibility Mean-Semi Variance-Entropy Model for Multi- Period Portfolio Selection with Transaction Costs. *European Journal of Operational Research*, 222(5), 341-349.

Zhang, X.L. (2009). Using Genetic Algorithm to Solve a New Multi-period Stochastic Optimization Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 231(13), 114-123.