

یک مدل ریاضی جدید جهت حل مسئله بالانس خطوط مونتاژ چند محصولی

محمدتقی تقوی فرد^۱

چکیده: ساده‌ترین نوع مسئله بالانس خط مونتاژ، یافتن تخصیص مناسبی از فعالیت‌های مونتاژ به مجموعه‌ای از ایستگاه‌های تولیدی بر اساس زمان سیکل، محدودیت‌های پیش‌نیازی و دیاگرام مونتاژ است تا معیارهای خاصی همچون روانی خط تولید و یا کارایی در شرایط مطلوبی قرار گیرند. در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته برای بالانس خطوط مونتاژ چند محصولی همراه با زمان‌های عملیاتی بیشتر از زمان سیکل و محدودیت‌های منطقه‌ای ارائه می‌شود. عملکرد مدل پیشنهادی در یافتن راه حل بهینه با عملکرد چند مدل موجود در ادبیات موضوع بر روی تعدادی مسئله نمونه مقایسه شده و نتایج امیدوار کننده حاصل شده‌اند. همچنین برتری نسبی مدل پیشنهادی در مورد معیارهایی همچون روانی خط، کارایی خط، انحرافات و عدم کارایی بر روی مثال‌های نمونه با یکی از رویکردهای موجود در ادبیات موضوع، توسط آزمون ناپارامتریک کروسکال - والیس تأیید شده است.

واژه‌های کلیدی: بالانس خط مونتاژ، ایستگاه‌های موازی، برنامه‌ریزی عدد صحیح، مدل تولید چند محصولی

۱. استادیار دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۵/۷

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۸۹/۶/۲۹

نویسنده مسئول مقاله: محمدتقی تقوی فرد

Email: dr.taghavifard@gmail.com

مقدمه

بالانس خط مونتاژ یکی از مهم‌ترین مسایل در تولید انبوه^۱ است. گروه‌بندی عملیات تولید بر حسب قواعد و شرایط محیطی به سادگی یا پیچیدگی خط وابسته است. این نوع مسایل در حالت ساده با تخصیص عملیات به گروه‌های ایستگاهی^۲ تنها با توجه به زمان سیکل^۳ و محدودیت‌های پیش‌نیازی^۴ می‌پردازد، ولی در شرایطی نزدیک به واقعیت، با افزودن شرایطی همچون روابط هم‌نیازی و منطقه‌ای، نیروی انسانی، تجهیزات، تولید چند محصولی و مسایل جانمایی با انواع زمان‌های سیکل به بالاترین سطح خود خواهند رسید. اهمیت این دسته از مسایل از این جهت است که چنانچه در خط تولید عواملی همچون تعداد ایستگاه‌ها، زمان سیکل، کارآیی خط، بیکاری کارگر و چیدمان ایستگاه‌ها، مورد بررسی و بهبود قرار داده شود، موجبات کاهش زمان و هزینه در مراحل طراحی و اجرا فراهم شده و در نهایت تأثیر مطلوب بر مدیریت خط تولید خواهد گذاشت.

در این مقاله ضمن پیشنهاد یک مدل، امکان ایجاد مناطق کاری و ایجاد ایستگاه‌های موازی برای عملیات با زمان طولانی‌تر از سیکل زمانی تولید فراهم خواهد شد. این مدل با شرایط و محدودیت‌های تعریف شده با استفاده از چند مثال الگو در ادبیات موضوع آزمایش شده است. نتایج بیانگر عملکرد مناسب‌تر مدل پیشنهادی در مورد مثال‌های نمونه است. مدل پیشنهادی مقاله با استفاده از روش انشعاب و تحدید^۵ حل شده و مدل پیشنهادی در نرم‌افزار OPL 5.1 کدنویسی و پیاده‌سازی شده است. به‌علت قرار گرفتن این نوع مسایل در زمره مسایل چند جمله‌ای غیرقطعی سخت^۶، یافتن جواب‌های مناسب برای مثال‌های دنیای واقعی که ابعاد بزرگی دارند در در زمانی منطقی میسر نیست. بنابراین، با در نظر گرفتن محدودیت‌های کرانی، مسئله به‌سوی یافتن راه حل‌های نزدیک به بهینه هدایت شده است. سایر قسمت‌های این مقاله به‌ترتیب زیر سازماندهی شده‌اند. در بخش دوم پیشینه‌ای از پیدایش مسئله بالانس خط و گونه‌های مختلف آن به انضمام روش‌های حل توسعه داده شده برای مسئله و ویژگی‌های آن‌ها ارایه شده است. بخش سوم به بیان مسئله و

1. Mass Production
2. Station Groups
3. Cycle Time
4. Precedence Constraints
5. Branch and Bound Method
6. Non-deterministic Polynomial-Hard: NP-Hard

مفروضات اساسی مسئله بالانس خط مونتاژ اختصاص دارد. مدل‌سازی ریاضی مسئله بالانس خط مونتاژ چند محصولی، شامل معرفی پارامترها و ارایه مدل پیشنهادی در بخش چهارم بحث شده است. نتایج آزمایش‌های در بخش ۵ ارایه شده‌اند. در بخش پنجم از مقاله ۴ مثال نمونه از مسئله بالانس خط مونتاژ از ادبیات موضوع انتخاب و معرفی شده‌اند، سپس با رویکرد پیشنهادی این مقاله و یک رویکرد موجود در ادبیات اقدام به حل آن‌ها شده است. نتایج آزمون‌های آماری ناپارامتریک بیانگر برتری نسبی مدل پیشنهادی مقاله هستند. در بخش ششم مقاله با جمع‌بندی و نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی به انتها می‌رسد.

پیشینه پژوهش

مدل ریاضی مسئله بالانس خط برای اولین بار در سال ۱۹۵۵ توسط سالوسون ارایه شده است. در چند دهه‌ی اخیر فعالیت‌های بسیاری بر روی مسایل مربوط به بالانس خطوط مونتاژ انجام شده است. گونه‌های مختلفی از مسئله به لحاظ فرم خط مونتاژ همچون بالانس خطوط مونتاژ دوطرفه؛ نعلی شکل؛ پیمایش خط مونتاژ همچون گونه‌های یکنواخت و غیریکنواخت، تعداد محصولات تولیدی در خط مونتاژ همچون گونه‌های تک محصولی و چند محصولی در ادبیات موضوع ارایه شده‌اند. همانطور که اشاره شد، مسایل مرتبط با این حوزه از خطوط ساده تولیدی آغاز و در ادامه به مسایلی همچون خطوط ترکیبی؛ خطوط با زمان احتمالی؛ خطوط نعلی؛ خطوط دوطرفه؛ خطوط روباتیک و خطوطی با ایستگاه‌های موازی و تنوع تجهیزات پرداخته می‌شود.

بیشتر پژوهش‌های انجام شده بر روی دو نوع از مسایل بالانس خط مونتاژ متمرکز شده‌اند. در مسئله نوع اول، زمان سیکل خط مونتاژ به عنوان ورودی مسئله و هدف کاهش تعداد ایستگاه‌های کاری است [۲][۳][۴][۵]. در مسئله نوع دوم، تعداد ایستگاه‌های مونتاژ به عنوان ورودی مسئله معین است و تابع هدف کمینه زمان سیکل کاری است [۶][۷][۸]. از نظر محاسباتی مسئله بالانس خط مونتاژ جزء مسایل چند جمله‌ای غیر قطعی سخت NP-Hard قرار می‌گیرد. به طوری که بهینه‌سازی و حل آن در مدت زمان منطقی مشکل یا غیر ممکن است [۹]. بنابراین، از روش‌های ابتکاری و ابر ابتکاری در حل این مسئله استفاده می‌شود [۱۳][۱۴]. اولین تلاش جهت استفاده از الگوریتم‌های ابر ابتکاری در حل این

مسئله با استفاده از الگوریتم ژنتیکی گروهی انجام گرفت. نویسندگان الگوریتم ژنتیکی گروهی که برای مسئله بسته‌بندی قطعات به کار گرفته بودند، برای حل مسئله بالانس خط مونتاژ توسعه دادند. یکی از فواید مدل قابلیت کنترل نمودن مسایلی با تراکم کم محدودیت‌های پیش‌نیازی است (به علت استفاده از مدل مسئله بسته‌بندی) [۱۰]. "اسکول" و "وب" الگوریتم‌های پایه‌ای جست‌وجوی ممنوع را برای حل مسئله نوع اول و دوم نشان دادند [۵]. "چیانگ" الگوریتم جست‌وجوی ممنوع دیگری برای حل مسئله نوع اول پیشنهاد نمود [۱۱]. با وجود آنکه هر دو پژوهش از مدل ساده الگوریتم استفاده کرده‌اند، ولی نتایج خوبی بر روی مجموعه داده‌های استاندارد به دست آورده‌اند. "لاپیره" و همکاران الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه پژوهش‌های قبل را توسعه داده‌اند و مدل خود را با استفاده از داده‌های عملی آزمایش نموده‌اند [۴]. "مک مولین و ترازویچ" از الگوریتم کلونی مورچگان جهت حل مسئله بالانس خط مونتاژ چند محصولی مرکب با زمان‌های تصادفی استفاده کرده‌اند [۱۲]. به تازگی جهان و فتحی [۱] نیز بر روی مسئله بالانس با استفاده از راه‌حل ابتکاری مسیر بحرانی پژوهش نموده‌اند.

بالانس خط مونتاژ: بیان مسئله و مفروضات

خط تولید یک مجموعه پیوسته از ایستگاه‌های کاری متصل توسط یک سیستم دسترسی به مواد است. در هر ایستگاه مجموعه‌ای از عملیات با استفاده از فرآیند مونتاژ از پیش تعریف شده مشغول به کار است. در یک خط یکنواخت به ازای هر سیکل زمانی یک محصول از ایستگاه جاری به ایستگاه بعدی منتقل شده و محصول دیگری از ایستگاه قبلی وارد ایستگاه فعلی می‌شود. بنابراین نرخ تولید خط مونتاژ همان زمان سیکل است. تعداد مناطق کاری و تعداد ایستگاه‌های موازی و به دست آوردن بهترین تعداد ایستگاه موازی به عنوان کران بالا از مهم‌ترین اهداف طراحی خط مونتاژ بوده و در کنار آن محدودیت‌های مسئله در رسیدن به این اهداف باید ارضا شوند.

مفروضات اصلی زیر در مورد مدل ارائه شده در این مقاله با اهمیت است:

- زمان عملیات یعنی زمان لازم برای انجام هر عمل مونتاژ مقداری مشخص و از پیش تعریف شده است.

- میان عملیات روابط تقدم و تأخري وجود دارد که از آنها با نام روابط پیشنهادی یاد می‌شود.
 - مجموعه‌ای از محدودیت‌های منطقه‌ای، که تعیین می‌کند آیا مجموعه عملیات به خصوصی باید در یک منطقه ایستگاهی اختصاص یابند یا اینکه نباید در یک منطقه ایستگاهی قرار گیرند.
 - ایستگاه‌بندی عملیاتی که زمانی بیش از زمان سیکل معین از قبل تعریف شده دارند، در قالب ایستگاه‌های موازی انجام می‌گیرد.
- مدل پیشنهادی این مقاله یک مدل چند محصولی بوده که عملیات جداگانه و نمودار عملیات و محدودیت‌های منطقه‌ای جداگانه برای هر محصول است. بنابراین محاسبات و ایستگاه هر محصول به‌طور جداگانه انجام خواهد شد.

مدل‌سازی ریاضی بالانس خطوط مونتاژ چند محصولی

مسئله مورد توجه این مقاله از دسته مسایل بالانس خط مونتاژ چند محصولی است.

مشخصات مدل پیشنهادی شامل هدف و محدودیت‌هایی به شرح ذیل است:

۱- هدف مسئله عبارت از کمینه نمودن ترکیبی از معیارهای مختلف:

- تعداد منطقه ایستگاهی با توجه به زمان عملیات برای هر محصول
- تعداد ایستگاه موازی در هر منطقه ایستگاهی در صورت نیاز
- تعداد سطوح موازی‌سازی در هر منطقه ایستگاهی

۲- مسئله محدودیت‌هایی به شرح ذیل دارد:

- تعداد ایستگاه‌های مورد نیاز با زمان سیکل معین است.
- وجود توانایی تخصیص عملیات برای تولید چندین محصول
- تخصیص منفرد هر عمل به ازای هر محصول در هر منطقه ایستگاهی (محدودیت ۱)
- رعایت تقدم و تأخر عملیات یا پیش‌نیازی (محدودیت ۲)
- امکان قرارگیری مجموعه عملیات با یکدیگر (محدودیت منطقه‌ای ۳)
- امکان عدم قرارگیری مجموعه عملیات با یکدیگر (محدودیت منطقه‌ای ۴)
- امکان تخصیص عملیات با زمانی بزرگ‌تر از سیکل زمانی (محدودیت ۵)

- در نظر گرفتن ایستگاه موازی به تعداد مناسب برای هر منطقه ایستگاهی با توجه به زمان عملیات (محدودیت ۵).
- اختصاص منفرد ایستگاه موازی به هر منطقه ایستگاهی (محدودیت ۶).
- حداکثر تعداد ایستگاه‌های موازی محدود به حداکثر تعداد عملیات با زمان بزرگ‌تر از زمان سیکل است (محدودیت ۷).
- تعداد کل مناطق ایستگاهی برای ایستگاه‌بندی هر مدل محصول قابل محاسبه است (محدودیت ۸).

معرفی پارامترها

X_{ijk} : متغیر تصمیم صفر و یکی است که در صورت تخصیص عمل i از محصول نوع j به منطقه k ، یک و در غیر این صورت صفر خواهد بود.

Y_{kjp} : متغیر صفر و یک تقسیم منطقه k برای محصول نوع j به p ایستگاه موازی را نمایش می‌دهد. اگر منطقه k برای محصول نوع j به p ایستگاه موازی تقسیم شده باشد، آنگاه مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر اختیار می‌کند.

S_{jk} : زمان بیکاری منطقه k برای محصول نوع j

Z_j : تعداد کل مناطق ایستگاهی برای محصول نوع j

n_{task} : تعداد کل عملیات

k_{max} : حداکثر سطح موازی‌سازی در هر منطقه

$Predec_i$: مجموعه پیش‌نیاز عمل i ام

ppt : مجموعه اعمالی که باید در یک منطقه اختصاص یابند

npt : مجموعه اعمالی که نباید در یک منطقه اختصاص یابند

t_{ij} : مجموعه زمان عملیات برای هر عمل i از محصول نوع j

n_{model} : تعداد مدل‌های محصول

n_j : متغیر تصمیم و تعداد ایستگاه موازی

C : زمان سیکل

i : شاخص عملیات $i = 1, \dots, n_{task}$

j : شاخص مدل‌های محصول $j = 1, \dots, n_{model}$

p : شاخص ایستگاه موازی $p = 1, \dots, k_{\max}$

k : شاخص منطقه‌های ایستگاهی $k = 1, \dots, n_{\text{task}}$

مدل پیشنهادی

$$\text{Min } z_j + \sum_{j=1}^{n_{\text{model}}} p \cdot n_j + \sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{model}}} \sum_{p=1}^{k_{\max}} p \cdot y_{kjp} \quad (1)$$

s.t.:

$$\sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} x_{ijk} = 1 \quad \forall i, \forall j \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} k \cdot x_{gjk} \leq \sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} k \cdot x_{hjk} \quad g \in \text{predec}, \forall j \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} x_{gjk} = \sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} x_{hjk} \quad g, h \in \text{tpp}, \forall j \quad (4)$$

$$x_{gjk} + x_{hjk} \leq 1 \quad g, h \in \text{tp}, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{task}}} t_{ij} \cdot x_{ijk} \leq \sum_{p=1}^{k_{\max}} k \cdot y_{kjp} \cdot c \quad \forall j \quad (6)$$

$$\sum_{p=1}^{k_{\max}} y_{kjp} \leq 1 \quad \forall k, \forall j \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} \sum_{p=2}^{k_{\max}} y_{kjp} \leq n_j \quad \forall j \quad (8)$$

$$z_j \geq \sum_{k=1}^{n_{\text{task}}} k \cdot x_{ijk} \quad \forall i, \forall j \quad (9)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad (10)$$

$$y_{kjp} \in \{0,1\} \quad (11)$$

$$p, k, z_j, n_j \geq 0 \quad (12)$$

نتایج آزمایش‌ها

مثال‌های نمونه

برای نشان دادن نحوه‌ی عملکرد مدل پیشنهادی، ۴ مثال نمونه از ادبیات موضوع انتخاب شده‌اند. مشخصات مثال‌های مورد نظر در جدول ۱ ارایه شده‌اند.

جدول ۱. مثال‌های نمونه بالانس خط مونتاژ

مثال نمونه ۴		مثال نمونه ۳		مثال نمونه ۲		مثال نمونه ۱		پدیده ^۱
پیش‌نیاز	زمان	پیش‌نیاز	زمان	پیش‌نیاز	زمان	پیش‌نیاز	زمان	
-	۱۰۲	-	۱۲	-	۳	-	۵	۱
۱	۳۴	-	۶۰	۱	۶	۱	۳	۲
۱	۳۶	۱	۵۴	۱	۷	۱	۴	۳
۲	۳۲	۱	۲۴	۲	۶	۲	۶	۴
۳	۳۳	۲	۵۴	۲	۴	۳	۵	۵
۵،۴	۲۰	۳	۴۸	۳،۲	۸	۲	۳	۶
۵،۴	۱۳۰	۴	۶	۳	۹	۳	۴	۷
۶	۲۱	۵	۶	۶	۱۱	۶،۴	۵	۸
۸	۳۶	۵	۴۲	۸،۵،۴	۲	۷،۵،۴	۳	۹
۷	۷۸	۷،۶	۷۲	۱۱،۸	۱۳	-	-	۱۰
۱۰،۷	۲۰	۹،۸	۶۰	۷	۴	-	-	۱۱
۹،۷	۷۸	۱۰	۴۸	۱۰،۹	۳	-	-	۱۲
۱۱	۲۱	۱۰	۲۴	-	-	-	-	۱۳
۱۵،۱۲	۳۶	۱۱	۱۲	-	-	-	-	۱۴
۱۳	۳۶	۱۳،۱۲	۳۶	-	-	-	-	۱۵
۱۴	۲۴	۱۴	۳۶	-	-	-	-	۱۶
۱۶،۱۵	۰	۱۶،۱۵	۹۰	-	-	-	-	۱۷
-	-	۱۷	۱۸	-	-	-	-	۱۸
-	-	۱۷	۴۸	-	-	-	-	۱۹
-	-	۱۹،۱۸	۵۴	-	-	-	-	۲۰

حل مدل

مسایل نمونه توسط مدل پیشنهادی ارایه شده و مدل جهان و فتحی [۱] در نرم افزار OPL5.1 کدنویسی شده‌اند. نتایج اجرای مدل پیشنهادی و مدل جهان و فتحی [۱] در مورد مثال‌های نمونه در جدول‌های ۲ و ۳ ارایه شده‌اند. در این مدل برای رسیدن به اهداف تعریف شده با محدودیت‌های موجود با استفاده از یک کامپیوتر پنتیوم 3 GHz و 2 GB حافظه و برای ۲۰ پدیده به چندین ساعت وقت نیاز است. ولی با تغییراتی اندک در مدل به یک جواب خوب خواهیم رسید که زمان آن کمتر از ۱۰ دقیقه خواهد بود.

جدول ۲. نتایج به کارگیری مدل پیشنهادی بر روی مثال‌های نمونه

مثال نمونه ۲			مثال نمونه ۱			ایستگاه
بیکاری ایستگاه	عملیات ایستگاه	زمان ایستگاه	بیکاری ایستگاه	عملیات ایستگاه	زمان ایستگاه	
۰	۵-۳-۲-۱	۲۰	۱	۶-۲-۱	۱۱	۱
۱	۸-۶	۱۹	۳	۵-۳	۹	۲
۱	۱۱-۷-۴	۱۹	۱	۷-۴	۱۰	۳
۲	۱۲-۱۰-۹	۱۸	۴	۹-۸	۸	۴
-	-	-	-	-	-	۵
-	-	-	-	-	-	۶
-	-	-	-	-	-	۷
-	-	-	-	-	-	۸
-	-	-	-	-	-	۹
-	-	-	-	-	-	۱۰
مثال نمونه ۴			مثال نمونه ۳			
۰	۱	۱۰۲	۰	۲	۶۰	۱
۳۶	۴-۲	۶۶	۶	۸-۵	۵۴	۲
۱	۷-۵-۳	۱۹۹	۰	۹-۱	۶۰	۳
۲۵	۹-۸-۶	۷۷	۰	۳	۶۰	۴
۲۴	۱۰	۷۸	۶	۱۱	۵۴	۵
۲۵	۱۵-۱۳-۱۱	۷۷	۶	۱۰-۷-۶-۴	۱۷۴	۶
۲۴	۱۲	۷۸	۰	۱۴-۱۲	۶۰	۷
۴۲	۱۶-۱۴	۶۰	۰	۱۸-۱۷-۱۶-۱۵	۱۸۰	۸
-	-	-	۱۲	۱۹	۴۸	۹
-	-	-	۶	۲۰	۵۴	۱۰

جدول ۳. نتایج به کارگیری مدل جهان و فتی [۱] بر روی مثال‌های نمونه

ایستگاه	مثال نمونه ۱			مثال نمونه ۲		
	زمان ایستگاه	عملیات ایستگاه	بیکاری ایستگاه	زمان ایستگاه	عملیات ایستگاه	بیکاری ایستگاه
۱	۱۱	۶-۲-۱	۱	۱۹	۵-۴-۲-۱	۱
۲	۹	۵-۳	۳	۲۰	۱۱-۷-۳	۰
۳	۱۱	۸-۴	۲	۱۹	۸-۶	۱
۴	۷	۹-۷	۵	۱۸	۱۱-۱۰-۹	۲
۵	-	-	-	-	-	-
۶	-	-	-	-	-	-
۷	-	-	-	-	-	-
۸	-	-	-	-	-	-
۹	-	-	-	-	-	-
۱۰	-	-	-	-	-	-
	مثال نمونه ۳			مثال نمونه ۴		
۱	۶۰	۲	۰	۱۰۲	۱	۰
۲	۶۰	۵	۰	۶۶	۴-۲	۳۶
۳	۵۴	۹-۸-۱	۶	۶۹	۵-۳	۳۹
۴	۵۴	۱۱	۶	۱۳۰	۷	۷۰
۵	۶۰	۳	۰	۷۷	۹-۸-۶	۲۵
۶	۱۷۴	۱۳-۱۰-۷-۶-۴	۶	۷۸	۱۰	۲۴
۷	۶۰	۱۴-۱۲	۰	۷۷	۱۵-۱۳-۱۱	۲۵
۸	۱۸۰	۱۸-۱۷-۱۶-۱۵	۰	۷۸	۱۲	۲۴
۹	۴۸	۱۹	۱۲	۶۰	۱۶-۱۴	۴۲
۱۰	۵۴	۲۰	۶	-	-	-

معیارهای عملکرد حل

پس از مدل‌سازی و حل مثال‌های نمونه با هر دو رویکرد، می‌توان با سنجش‌هایی عملکرد دو مدل را در مورد مثال‌های نمونه مورد بررسی قرار داد. از این دست معیارها می‌توان میانگین

قدر مطلق انحرافات^۱، شاخص تأخیر^۲، شاخص روانی^۳ و کارآیی^۴ خط را نام برد. میانگین قدر مطلق انحرافات از رابطه (۱۳) به دست می آید و برای اولین بار توسط راجامادوگو و تالبوت در سال ۱۹۹۱ میلادی مطرح شد. در این رابطه، N تعداد عملیات، T_{si} زمان عملیات هر ایستگاه و $\bar{T} = (1/N) \times \sum_{x \in S_i} T_x$ میانگین زمان کار بوده که از رابطه $\bar{T} = (1/N) \times \sum_{x \in S_i} T_x$ محاسبه می شود. T_x زمان هر عمل منفرد است.

شاخص تأخیر از رابطه (۱۴) محاسبه می شود و برای اولین بار توسط اسکول معرفی شد. در این رابطه، CT زمان سیکل، N تعداد عملیات و T_{si} زمان عملیات هر ایستگاه است. BD درصد ناکارایی خط را نشان خواهد داد.

شاخص روانی خط از رابطه (۱۵) محاسبه می شود و برای اولین بار توسط مودی و یونگک در سال ۱۹۹۵ میلادی ارائه شد. در آن CT زمان سیکل و T_{si} زمان عملیات هر ایستگاه است.

شاخص محاسبه کارایی خط توسط رابطه (۱۶) محاسبه می شود و توسط اسکول در سال ۱۹۹۹ معرفی شد. در آن پس از قرار دادن CT به عنوان زمان سیکل و T_{si} به عنوان زمان عملیات هر ایستگاه و \bar{T} به عنوان میانگین زمان کار می توانیم میزان کارایی خط را بر حسب درصد بیان نماییم.

$$MAD = \frac{1}{N} \sum_{x \in S_i} |T_{s_i} - \bar{T}| \quad (13)$$

$$BD = \left(1 - \frac{\sum_{x \in S_i} T_{s_i}}{CT \times N}\right) \times 100 \quad (14)$$

$$SI = \sqrt{(CT - T_{s_i})^2} \quad (15)$$

$$LE = \left(1 - \frac{\sum |T_{s_i} - \bar{T}|}{N \times \bar{T}}\right) \times 100 \quad (16)$$

1. Mean Absolute Deviations (MAD)
2. Balance Delay (BD)
3. Smoothness Index (SI)
4. Line Efficiency (LE)

برای پاسخ‌های حاصل از حل دو رویکرد بر روی ۴ مثال نمونه شاخص‌های عملکرد در روابط (۱۶) - (۱۳) محاسبه و در جدول ۴ ارایه شده‌اند.

جدول ۴. مقایسه‌ی معیارهای عملکرد دو رویکرد بر روی مثال‌های نمونه

شماره مثال	مدل جهان و فتحی [۱]				مدل پیشنهادی			
	روانی خط	کارایی	میانگین انحراف	عدم کارایی	روانی خط	کارایی	میانگین انحراف	عدم کارایی
۱	۱۶/۹۷	۰/۹۷	۲/۸۲	۰/۰۴	۱۶/۹۷	۰/۹۷	۲/۸۲	۰/۰۴
۲	۲/۴۵	۰/۹۷	۰/۵	۰/۰۵	۲/۴۵	۰/۹۷	۰/۵	۰/۰۵
۳	۵/۴۸	۰/۸۹	۱/۵	۰/۲۱	۶/۰	۰/۸۴	۱/۰	۰/۲۱
۴	۱۰/۱۹	۰/۸۵	۱۲/۳	۰/۲۸	۸/۲۳	۰/۸۷	۸/۵۶	۰/۲

مقایسه‌های آماری بر روی معیارهای عملکرد هر دو مدل

هر چند که داده‌های جدول ۴ بیانگر نتایج بهتر مدل پیشنهادی در مورد مثال نمونه است، اما به جهت آزمون برتری معنادار مدل پیشنهادی بر مدل جهان و فتحی [۱] لازم است که آزمون‌های آماری ترتیب داده شود و با استفاده از مقادیر معیارهای محاسبه شده، عملکرد دو رویکرد توسط این آزمون آزمایش می‌شود. از آنجایی که تعداد نمونه‌های آماری (مثال‌های نمونه) به اندازه کافی بزرگ نبوده و همچنین از رفتار آماره‌های آزمون اطلاع دقیقی در دست نیست، بنابراین باید از روش‌های آزمون ناپارامتری برای آزمون عملکرد دو رویکرد استفاده نمود. در این مقاله، آزمون آماری کروسکال - والیس^۱ که یکی از آزمون‌های ناپارامتری معتبر و قدرتمند است، جهت این منظور بهره‌برداری شده است. نتایج آزمون کروسکال - والیس بر ۴ معیار عملکرد بیان شده در معادلات ۱۳ الی ۱۶ و در مورد ۴ مثال نمونه (تعداد نمونه‌ها) با توجه به رویکرد پیشنهادی این مقاله و رویکرد جهان و فتحی [۱] در جدول ۵ خلاصه شده‌اند. برای انجام آزمون کروسکال - والیس از نرم‌افزار MINITAB استفاده شده است.

1. Kruskal-Wallis

جدول ۵. نتایج آزمون کروسکال-والیس بر روی معیارهای عملکرد

آزمون کروسکال-والیس بر روی معیار روانی مدل پیشنهادی و مدل جهان و فتحی				
مقدار z	رتبه میانگین	میان	تعداد	معیار (جهان و فتحی)
-۱/۳۴	۱/۰	۲/۴۵۰	۱	۲/۴۵
-۰/۴۵	۲/۰	۶/۰۰۰	۱	۵/۴۸
۰/۴۵	۳/۰	۸/۲۳۰	۱	۱۰/۱۹
۱/۳۴	۴/۰	۱۶/۹۷۰	۱	۱۶/۹۷
	۲/۵		۴	مجموع
H = ۳/۰۰ DF = ۳ P = ۰/۳۹۲				
آزمون کروسکال-والیس بر روی معیار کارایی مدل پیشنهادی و مدل جهان و فتحی				
مقدار z	رتبه میانگین	میان	تعداد	معیار (جهان و فتحی)
-۰/۴۵	۲/۰	۰/۸۷۰۰	۱	۰/۸۵
-۱/۳۴	۱/۰	۰/۸۴۰۰	۱	۰/۸۹
۱/۵۵	۳/۵	۰/۹۷۰۰	۲	۰/۹۷
	۲/۵		۴	مجموع
H = ۳/۰۰ DF = ۳ P = ۰/۳۹۲				
آزمون کروسکال-والیس بر روی معیار میانگین انحراف مدل پیشنهادی و مدل جهان و فتحی				
مقدار z	رتبه میانگین	میان	تعداد	معیار (جهان و فتحی)
-۱/۳۴	۱/۰	۰/۵۰۰۰	۱	۰/۵۰
-۰/۴۵	۲/۰	۱/۰۰۰۰	۱	۱/۵۰
۰/۴۵	۳/۰	۲/۸۲۰۰	۱	۲/۸۲
۱/۳۴	۴/۰	۸/۵۶۰۰	۱	۱۲/۳۰
	۲/۵		۴	مجموع
H = ۲/۷۰ DF = 2 P = ۰/۲۵۹				
آزمون کروسکال-والیس بر روی معیار عدم کارایی مدل پیشنهادی و مدل جهان و فتحی				
مقدار z	رتبه میانگین	میان	تعداد	معیار (جهان و فتحی)
-۱/۳۴	۱/۰	۰/۰۴۰۰۰	۱	۰/۰۴
-۰/۴۵	۲/۰	۰/۰۵۰۰۰	۱	۰/۰۵
۱/۳۴	۴/۰	۰/۲۱۰۰۰	۱	۰/۲۱
۰/۴۵	۳/۰	۰/۲۰۰۰۰	۱	۰/۲۸
	۲/۵		۴	مجموع
H = ۳/۰۰ DF = ۳ P = ۰/۳۹۲				

آزمون‌ها بیانگر رد فرض صفر (میان‌ه جامعه‌ها همگی برابر هستند)، در مورد تمامی معیارهای عملکرد در هر ۴ مثال نمونه هستند. این نتایج بیانگر برتری نسبی مدل پیشنهادی بر مدل جهان و فتحی [۱] در مورد مثال‌های نمونه است.

نتیجه

در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته برای بالانس خطوط مونتاژ چند محصولی همراه با زمان‌های عملیاتی بیشتر از زمان سیکل و محدودیت‌های منطقه‌ای ارائه شد. ویژگی‌های لحاظ شده در مدل، تصویری واقعی‌تر از آنچه در واقعیت محیط‌های تولیدی رخ می‌دهد، فراهم نمود. عملکرد مدل پیشنهادی در یافتن راه‌حل بهینه با عملکرد مدل‌های موجود توسط برخی از معیارهای عملکرد نظیر روانی خط، کارایی خط، میانگین انحراف و عدم کارایی خط مورد مقایسه قرار گرفت. برای این منظور تعدادی مسئله نمونه از ادبیات موضوع انتخاب و هر دو مدل بر روی آن‌ها کدنویسی و اجرا شدند. نتایج آزمون‌های آماری ناپارامتری کروسکال-والیس بیانگر برتری نسبی مدل پیشنهادی این مقاله نسبت به مدل‌های موجود در ادبیات بر روی مثال‌های انتخابی و در مورد معیارهای روانی خط، کارایی خط، میانگین انحراف و عدم کارایی خط هستند. با توجه به اینکه برتری نسبی مدل‌سازی ریاضی ارائه شده در این مقاله نسبت به روش‌های ریاضی موجود در ادبیات موضوع به لحاظ آماری و با استفاده از مثال‌های نمونه مشخص شده است، می‌توان به‌عنوان زمینه‌ی پژوهش‌های آتی، مدل‌سازی مورد توجه در این مقاله را به‌عنوان پایه‌ای مناسب برای توسعه روش‌های ابتکاری یا فراابتکاری برای ابعاد بزرگ‌تر قرار داده و آن مسایل را مدل‌سازی و حل نمود یا مدل مورد توجه در این مقاله را به‌صورت چند هدفه توسعه داد. در نظر گرفتن عدم قطعیت در مورد زمان‌های انجام و روابط پیش‌نیازی و یا در نظر گرفتن وزن برای عناصر مختلف توابع هدف نیز می‌تواند زمینه‌های جالبی برای پژوهش‌های آتی باشد.

منابع

۱. جهان، علی، فتحی، مسعود (۱۳۸۶). حل مسئله بالانس خط مونتاژ با استفاده از برنامه‌ریزی عدد صحیح و مقایسه آن با یک روش هیوریستیک مبتنی بر مسیر بحرانی، پنجمین کنفرانس مهندسی صنایع.
2. Anderson E. J, Ferris M. C (2008). Genetic algorithms for combinatorial optimization: The assembly line balancing problem, *ORSA Journal on Computing*; 6: 161-173.
3. Rubinovitz J, Levitin G (1995). Genetic algorithms for assembly line balancing, *International Journal of Production Economics*; 41: 343-354.
4. Lapierre S. D, Ruiz A, Soriano P (2004). Balancing assembly lines with tabu search, *European Journal of Operational Research*; 168(3): 826-837.
5. Scholl A, Voß S (1996). Simple assembly line balancing heuristic approaches, *Journal of Heuristic*; 2: 217- 244.
6. Scholl A, Klein R (1999). Balancing assembly lines effectively- A computational comparison, *European Journal of Operational Research*; 114(1): 50-58.
7. Simaria A. S, Vilarinho P. M (2004). A genetic algorithm based approach to the mixed-model assembly line balancing problem of type II, *Computers & Industrial Engineering*; 47: 391-407.
8. Rekiek B, Dolgui A, Delchambre A, Bratcu A (2002). State of the art of optimization methods for assembly line design, *Annual Reviews in Control*; 26: 163-174.
9. Wee T. S, Magazine M. J (1982). Assembly line balancing as generalized bin packing, *Operations Research Letters*; 1: 56-58.
10. Falkenauer E, Delchambre A (1992). A genetic algorithm for bin packing and line balancing, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*: 1186- 1192.
11. Chiang W. C., (1998). The application of a Tabu search meta-heuristic to the assembly line balancing problem, *Annals of Operations Research*; 77: 209-227.

12. McMullen P. R, Tarasewich P (2009). Using ant techniques to solve assembly line balancing problem. IIE Transaction; 35: 605- 617.
13. Kim Y. J, Kim Y. K, Cho Y (1998). A heuristic- based genetic algorithm for workload smoothing in assembly lines, Computers & Operations Research; 25(2): 99-111.
14. Talbot F. B, Patterson J. H, Cherlein W. V (1986). A comparative evaluation of heuristic line balancing techniques, Management science; 32(4): 430-454.