

توسعه‌ای بر روش AHP / DEA برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

محمد رضا علی‌رضایی^۱، محمد رضا رفیعی ثانی^۲

چکیده: روش AHP/DEA برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده، از کارهایی است که در زمینه ترکیب دو مقوله‌ی تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) و فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP) انجام شده است. این روش ایده‌ای جدید در زمینه ترکیب DEA و AHP است که توانسته با ترکیب نقاط قوت DEA و AHP به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) بپردازد. با این وجود، در این روش مشکلاتی از جمله منطقی نبودن مقایسه‌ی دو واحد تصمیم‌گیرنده در یک مدل DEA، عدم رتبه‌بندی کامل و عدم مطابقت با رتبه‌بندی DEA در حالت چند ورودی - چند خروجی دیده می‌شود. در این مقاله، روش AHP/DEA را توسعه می‌دهیم به طوری که مشکلات گفته شده، برطرف شود. در واقع ما در مرحله اول این روش دو مرحله‌ای، در تعیین مقادیر ماتریس مقایسات زوجی علاوه بر نسبت‌های کارایی واحدها میزان تأثیر هر واحد بر دیگر واحدها را نیز سنجیده‌ایم تا نگاه جامع‌تری به مسئله رتبه‌بندی داشته باشیم. نشان می‌دهیم، روش ارائه شده، ضمن اینکه یک رتبه‌بندی منطقی از واحدهای تصمیم‌گیرنده را ارائه می‌دهد، بارتبه‌بندی کارا-ناکارای DEA نیز مطابقت کامل دارد. مثال‌های عددی نیز، در مقاله آورده شده‌اند تا به کمک آن‌ها، ضمن تشریح روش، درک شهودی‌تری از مسایل مطرح شده در مقاله حاصل شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی، رتبه‌بندی

۱. استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، ایران

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران، گروه ریاضی کاربردی، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۸۸/۳/۳۰

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۸۹/۲/۱۵

نویسنده مسئول مقاله: محمد رضا رفیعی ثانی

Email: m_rafieesani@mathdep.iust.ac.ir

مقدمه

AHP و DEA دو ابزار قوی و شناخته شده در عرصه‌های مدیریت و تصمیم‌گیری، کاربردهای فراوانی در عرصه‌های مختلف پیدا کرده‌اند. هر چند این دو مفهوم به‌طور کاملاً مستقل از یکدیگر رشد یافته‌اند؛ اما پژوهش‌ها در سال‌های اخیر نشان می‌دهند که این دو مقوله، می‌توانند در کاربردهای واقعی با یکدیگر ترکیب شده و بدین‌سان، نقاط ضعف یکدیگر را پوشانده و از نقاط قوت یکدیگر بهره‌جویند [۱۲][۱۳].

DEA و AHP نه تنها در زمینه‌های کاربردی بلکه در مفاهیم تئوری و ساختاری نیز با یکدیگر ترکیب شده‌اند [۴][۵][۱۰][۱۱]. یکی از این مفاهیم مسئله‌ی رتبه‌بندی است که در هر دو روش، نقش به‌سزایی ایفا می‌کند. در AHP رتبه‌بندی بر اساس اظهارنظرهای تصمیم‌گیرنده بین چند آلترناتیو با معیارهای مختلف انجام می‌شود و در DEA، رتبه‌بندی بین واحدهای تصمیم‌گیرنده با چند ورودی و چند خروجی انجام می‌گیرد. با این وجود در DEA، رتبه‌بندی به دو دسته کارا - ناکارا صورت می‌پذیرد و مدل‌های کلاسیک DEA قادر به ارائه یک رتبه‌بندی کامل از واحدهای کارا نیستند، ازین‌رو پژوهش‌ها و مقالات زیادی در این زمینه ارائه شده است تا یک رتبه‌بندی کامل و منطقی از تمامی DMUها ارائه دهند.

سینوانی و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۰م با ترکیب نقاط قوت DEA و AHP، روش ترکیبی AHP/DEA را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در DEA ارائه دادند که با وجود اینکه رویکردی جدید برای رتبه‌بندی به حساب می‌آید مشکلات زیر در آن دیده می‌شود:

۱- عدم انطباق با رتبه‌بندی کارا- ناکارای DEA در حالت چند ورودی - چند خروجی: بین رتبه‌بندی DEA و AHP/DEA در حالت کلی مطابقت کامل وجود ندارد^۱ (مثال ۲ را ببینید) و ممکن است یک واحد کارای DEA در مکان پایین‌تری از یک واحد ناکارا قرار گیرد. این مسئله یک ضعف به حساب می‌آید؛ زیرا زمانی که یک واحد، توسط مدل DEA کارا شناخته می‌شود به این معنی است که این واحد توانسته با حداقل ورودی،

۱. برای اثبات این ادعا کافی است، مثالی نشان داده شود که در آن بین رتبه‌بندی DEA و AHP/DEA انطباق لازم برقرار نباشد.

حداکثر خروجی را نسبت به دیگر واحدها تولید کند؛ بنابراین، قرارداد این واحد در رتبه‌ای پایین‌تر از رتبه‌ی یک

واحد ناکارا، بدون در نظر گرفتن این توانایی، غیر منطقی است.

۲- قدرت جداکنندگی ضعیف بین واحدهای کارا در حالتی که تعداد واحدها در مقایسه با تعداد ورودی - خروجی ها کم است.

به‌طور اساسی ضعف DEA در رتبه‌بندی، از آنجا شکل می‌گیرد که مدل‌های کلاسیک DEA قادر به تفکیک واحدهای کارا از یکدیگر نیستند و یکی از دلایلی که این امر را موجب می‌شود؛ کوچک‌تر بودن تعداد DMUها نسبت به تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها است. این مسئله در روش AHP/DEA نه تنها رفع نشده بلکه بسیار شدیدتر مورد توجه قرار گرفته است (تعداد DMUها در هر مدل تنها دو DMU است). این امر باعث می‌شود که اکثر کارایی‌ها (در حالت چندورودی - چندخروجی)؛ بنابراین اکثر مقادیر ماتریس مقایسات زوجی یک شده و قدرت تفکیک‌پذیری روش ضعیف شود.

۳- غیر منطقی بودن مقایسه‌ی دو واحد تصمیم‌گیرنده با یک مدل DEA، در حالت چند ورودی - چند خروجی

بر اساس مفاهیم پایه‌ای DEA، استفاده از مدل‌های DEA مستلزم رعایت نکاتی است که از جمله آن‌ها متناسب بودن تعداد DMUها نسبت به تعداد ورودی‌ها و خروجی‌هاست [۳]. هر چند نظرات متفاوتی در خصوص چگونگی این تناسب در DEA مطرح شده است اما آنچه در تمامی این نظرات مشترک است، این است که تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده از تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها نبایستی کمتر باشد و این اصل در روش AHP/DEA رعایت نشده است.

در این مقاله، ما روش AHP/DEA را توسعه داده و روش بهبودیافته‌ی AHP/DEA را برای رتبه‌بندی واحدها ارائه می‌دهیم و با کمک قضایا و نتایج حاصل از آن‌ها نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی ضمن داشتن یک روند منطقی، مشکلات روش گفته شده را تا حد امکان پوشش می‌دهد. در واقع در روش پیشنهادی، ما مقادیر ماتریس مقایسات زوجی را بر اساس نسبت‌های کارایی و میزان تأثیرگذاری هر واحد بر دیگر واحدها در نظر می‌گیریم تا نگاه جامع‌تری نسبت به مسئله رتبه‌بندی داشته باشیم. در ادامه مثال‌هایی را

تنظیم کرده‌ایم که ضمن تشریح روش، درک شهودی تری از مسایل مطرح شده در مقاله را موجب می‌شوند.

بخش‌های بعدی این مقاله به این صورت تنظیم شده‌اند. در بخش دوم، مفهوم رتبه‌بندی در DEA و AHP را بیان می‌کنیم. در بخش سوم، روش AHP/DEA برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده را آورده‌ایم. در بخش چهارم، روش بهبود یافته AHP/DEA برای رتبه‌بندی DMU ها را ارائه می‌دهیم. در بخش پنجم، مثال‌های عددی آورده شده‌اند و در بخش پایانی، یک نتیجه‌گیری از بحث را ارائه خواهیم داد. در سرتاسر مقاله منظور از "روش AHP/DEA" روش ارائه شده توسط سینوانی و همکاران [۹] است و منظور از "روش بهبود یافته AHP/DEA" روش پیشنهادی ما در توسعه روش AHP/DEA است.

رتبه‌بندی در DEA و AHP

DEA

DEA یک روش ناپارامتری برای یافتن تابع تولید مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده است. به عبارت دیگر، DEA یک روش ناپارامتری است که هیچ فرضی را در خصوص شکل تابع تولید نیاز ندارد. در DEA، عموماً با n واحد تصمیم‌گیرنده روبرو هستیم که هر یک m ورودی x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) را برای تولید s خروجی y_r ($r = 1, 2, \dots, s$) استفاده می‌کنند. در DEA، اندازه کارایی واحد k ام، با نسبت وزندار شده‌ی خروجی‌ها به

ورودی‌ها یعنی با
$$h_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}$$
 حاصل می‌شود که در آن u_r ها وزن‌های خروجی

و v_i ها وزن‌های ورودی است و این وزن‌ها به گونه‌ای اختیار می‌شوند که $0 \leq h_j \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) باشد و h_k بیشترین مقدار شدنی خود را به دست آورد. اگر $h_k = 1$ ، آنگاه واحد k ام کارا تلقی می‌شود و اگر $h_k < 1$ ، آنگاه واحد k ام ناکارا است. با وجود اینکه اینگونه تخصیص وزن‌ها، یک ویژگی منحصر به فرد DEA است که آن را از دیگر روش‌های وزن‌دهی مانند تکنیک‌های تصمیم‌گیری چند معیاره متمایز می‌کند، با این حال باعث می‌شود در مدل‌های کلاسیک DEA، همواره با تعداد زیادی واحد کارا مواجه باشیم و رتبه‌بندی بین واحدهای کارا صورت نپذیرد.

AHP

AHP یک تکنیک تصمیم‌گیری چند معیاره است که براساس ترجیحات DM، از میان مجموعه‌ای از آلترناتیوها که معیارهای متفاوتی دارند، بهترین آلترناتیو را انتخاب می‌کند. به عبارت بهتر، در AHP، وزن‌دهی نه بر اساس یک مدل ریاضی و با هدف کارا شدن بلکه بر اساس تمایلات DM و ترجیحات او بین معیارها و آلترناتیوها است و بنابراین عموماً وزن‌هایی که در این روش به آلترناتیوها اختصاص می‌یابد یک رتبه‌بندی کامل از آن‌ها را ارائه می‌دهد.

در حالت کلی حل مسئله تصمیم‌گیری در AHP شامل مراحل زیر است [۷]:

۱ - تبدیل یک مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره به یک سلسله‌مراتبی در تبدیل یک مسئله تصمیم‌گیری به یک سلسله‌مراتبی، هدف کلی مسئله در بالاترین سطح قرار گرفته است، در سطح (سطوح) بعد معیارها (زیرمعیارها) قرار خواهند گرفت و آخرین سطح سلسله‌مراتبی را گزینه‌های تصمیم تشکیل خواهند داد.

۲ - تشکیل ماتریس مقایسات زوجی

روش (AHP)، به کمک مقایسات زوجی، فرآیندی را برای تنظیم اولویت‌ها در هر سطح از سلسله‌مراتبی، فراهم می‌کند که این مقایسات زوجی توسط مقیاس‌های ۱ تا ۹ انجام می‌شوند.

۳ - تعیین وزن‌های محلی معیارها

فرض کنید m, C_1, C_2, \dots, C_m معیار تصمیم‌گیری و $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ بردار وزن حاصل از روش AHP باشد که در شرط‌های $\sum_j w_j = 1$ و $w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$ صدق می‌کند. مقایسات زوجی بین m معیار تصمیم‌گیری، با پرسش از تصمیم‌گیرنده (Decision Maker) یا کارشناس صورت می‌پذیرد؛ بدین صورت که از نظر DM، با توجه به هدف کلی تصمیم‌گیری کدام معیار اهمیت بیشتری دارد و چه مقیاسی (بین ۱ تا ۹) به آن اختصاص می‌یابد. پاسخ این سؤالات ماتریس مقایسات زوجی $m \times m$ ای مانند ماتریس A را تشکیل می‌دهد.

$$A = (a_{ij})_{m \times m} = \begin{matrix} C_1 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \\ C_2 & \\ \dots & \\ C_m & \end{matrix}$$

که در آن a_{ij} ، نشان‌دهنده‌ی قضاوت $\frac{w_i}{w_j}$ با $a_{ij} = 1$ و $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ برای هر $i, j = 1, 2, \dots, m$ خواهد بود.

برای به‌دست آوردن بردار وزنی W از ماتریس مقایسات زوجی A ، روش‌های مختلفی ارایه شده است. یکی از مهم‌ترین روش‌های به‌دست آوردن وزن‌ها از ماتریس مقایسات زوجی، روش بردار ویژه (Eigen Vector) است؛ بدین صورت که اگر A ماتریس مقایسات زوجی باشد آنگاه بردار وزن W می‌تواند از حل معادله $AW = \lambda_{\max} W$ حاصل شود که در آن λ_{\max} بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس A است.

۴ - تعیین اولویت کلی برای هر گزینه و رتبه‌بندی گزینه‌ها با توجه به این اولویت‌ها
گزینه‌های تصمیم در فرآیندی مشابه معیارهای تصمیم، در هر معیار با یکدیگر مقایسه می‌شوند و بردار وزن‌های محلی مربوط به هر ماتریس حاصل می‌شود. پس از به‌دست آمدن وزن‌های محلی، وزن‌های کلی هر گزینه به کمک روش زیر موسوم به روش (Simple Additive Weighting) حاصل می‌شود:

$$W_{A_i} = \sum_{j=1}^m w_{ij} w_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن $w_j (j = 1, 2, \dots, m)$ وزن‌های محلی هر معیار، $w_{ij} (i = 1, 2, \dots, n)$ وزن‌های محلی هر گزینه نسبت به معیار j ام و $W_{A_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ وزن‌های کلی هر گزینه است.

روش AHP/DEA برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

سینوانی و همکاران در فرآیند دو مرحله‌ای زیر، به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده پرداخته‌اند.

مرحله اول: تشکیل ماتریس مقایسات زوجی به کمک DEA

فرض کنید n واحد تحت بررسی داریم که هر یک m ورودی x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) و s خروجی y_r ($r = 1, 2, \dots, s$) دارند. در این مرحله، برای هر دوجفت واحد A و B ابتدا مدل (۱) از DEA را اجرا می‌کنند.

$$\begin{aligned}
 E_{AA} &= \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rA} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iA} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rA} \leq 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rB} - \sum_{i=1}^m v_i x_{iB} \leq 0 \\
 & u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s, \quad v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{1}$$

در مدل (۱)، E_{AA} کارایی واحد A است. پس از محاسبه‌ی کارایی واحد A و B ، مقدار تقاطعی واحد B از رابطه‌ی (۲) محاسبه می‌شود.

$$E_{BA} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rB}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{iB}} \tag{2}$$

که u_r و v_i ها، وزن‌های به‌دست آمده از مدل (۱) است. در حالتی که وزن‌های اختصاص داده شده بزرگ‌تر از ε باشند ($u_r \geq \varepsilon$ و $v_i \geq \varepsilon$) از مدل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 E_{BA} &= \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rB} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iB} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rB} \leq 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rA} - E_{AA} \sum_{i=1}^m v_i x_{iA} \leq 0 \\
 & u_r \geq \varepsilon, r = 1, 2, \dots, s, \quad v_i \geq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3}$$

به طور مشابه می توان E_{AB} و E_{BB} را محاسبه نمود. بعد از محاسبه ی این مقادیر، برای هر جفت واحد i و j مقدار a_{ij} در ماتریس مقایسات زوجی بصورت زیر محاسبه می شود.

$$a_{ij} = \frac{E_{ii} + E_{ij}}{E_{jj} + E_{ji}} \quad \text{and} \quad a_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

مرحله دوم: محاسبه وزن های واحدها توسط AHP

در این مرحله به کمک یک فرآیند یک مرحله ای از AHP، (مرحله ۳ توضیح داده شده در بخش ۲-۲) برای ماتریس مقایسات زوجی به دست آمده در مرحله اول، بردار وزن های مربوطه را محاسبه کرده و براساس این وزن ها، واحدهای تصمیم گیرنده را رتبه بندی می کنند.

روش بهبود یافته AHP/DEA برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده

همان طور که در مقدمه اشاره شد روش AHP/DEA ارائه شده توسط سینوانی و همکاران (بخش ۳) دارای مشکلاتی است که رتبه بندی ناشی از آن را غیر قابل اطمینان می کند.

ما در این بخش، روش بهبود یافته AHP/DEA را برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده ارائه می دهیم و نشان می دهیم که روش پیشنهادی، ضمن ارائه ی یک رتبه بندی منطقی بین واحدها، بار رتبه بندی DEA نیز مطابقت کامل دارد.

فرض کنید n واحد تحت بررسی داریم که هر یک m ورودی x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) و s خروجی y_r ($r = 1, 2, \dots, s$) دارند. ابتدا توسط مدل DEA زیر، موسوم به مدل CCR با ماهیت ورودی، کارایی هر یک از واحدها را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

سپس فضای امکان تولید T_k ($k = 1, 2, \dots, n$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T_k = \left\{ (X, Y) \mid \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j X_j \leq X, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j Y_j \geq Y, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (6)$$

در واقع T_k فضای امکان تولید پس از حذف واحد k ام از مجموعه‌ی مشاهدات است.

اکنون در یک فرآیند n مرحله‌ای، کارایی واحدها را در هر یک از فضاهای امکان تولید فوق، با مدل زیر به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \min \theta_o \\ \text{s.t. } (\theta_o X_o, Y_o) \in T_k \end{aligned} \quad (7)$$

به عبارت دیگر، در مرحله k ام، واحد k ام را حذف کرده و کارایی دیگر واحدها را از مدل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \min \theta_o \\ \text{s.t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

اگر TE_k^i را کارایی واحد i ام پس از حذف واحد k ام تعریف کنیم، آنگاه نتایج محاسبات را می‌توان در جدولی مانند جدول (۱) نشان داد.

جدول ۱. کارایی‌ها پس از حذف واحد k ام ($k = 1, 2, \dots, n$)

واحدها	1	2	3	...	n
1	*	TE_1^2	TE_1^3	...	TE_1^n
2	TE_2^1	*	TE_2^3	...	TE_2^n
3	TE_3^1	TE_3^2	*	...	TE_3^n
...
n	TE_n^1	TE_n^2	TE_n^3	...	*

پس از تنظیم جدول (۱)، میزان ترجیح واحد i ام به واحد j ام را در ماتریس مقایسات زوجی از رابطه (۹) به دست می‌آوریم.

$$a_{ij} = \frac{TE^i + \{TE_j^i - TE^j\}}{TE^j + \{TE_j^i - TE^i\}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad a_{ii} = 1, a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad (9)$$

که در آن TE^i و TE^j کارایی‌های واحدهای i و j حاصل از مدل (۵) است $\{TE_j^i - TE^j\}$ میزان تأثیر واحد i ام بر واحد j ام است. در واقع، ترجیح واحد i به واحد j ، برابر نسبت‌های کارایی و میزان تأثیرگذاری واحدهای i و j بر یکدیگر است. پس از مشخص شدن ماتریس مقایسات زوجی به طریق فوق، مشابه روش AHP/DEA به کمک یک فرآیند یک مرحله‌ای از AHP، واحدهای تصمیم‌گیرنده را رتبه‌بندی می‌کنیم.

برای روش بهبود یافته AHP/DEA قضایای زیر اثبات می‌شوند.

قضیه ۱. اگر واحد k ام ناکارا باشد، آنگاه برای هر واحد i مخالف k داریم: $TE_k^i = TE^i$ اثبات: اگر مدل (۵) را در نظر بگیریم آنگاه حذف واحد k ام زمانی در اندازه‌ی کارایی واحد i ام تغییر ایجاد می‌کند که $\lambda_k \neq 0$ باشد. از طرفی در مدل (۵)، $\lambda_k \neq 0$ اگر و فقط اگر واحد k کارا باشد [۶]؛ بنابراین داریم $TE_k^i = TE^i$.

قضیه ۲. اگر واحد i کارا و واحد j ناکارا باشد و w_i و w_j بترتیب وزن‌های حاصل از روش بهبود یافته AHP/DEA برای واحدهای i و j باشد آنگاه $w_i > w_j$.
اثبات: نشان می‌دهیم، در ماتریس مقایسات زوجی، $(k = 1, 2, \dots, n)$ $a_{ik} > a_{jk}$ و بنابراین بنا به روش بردار ویژه داریم: $w_i > w_j$.
 بنا به قضیه ۱ $TE_j^k = TE^k$ و چون $TE^i > TE^j$ داریم:

$$TE^i + \{TE_i^k - TE^k\} > TE^j + \{TE_j^k - TE^k\} = TE^j \quad (1-2)$$

از طرفی چون حذف هر واحد تأثیری در کارایی واحد کارا ندارد، داریم
 $\{TE_k^j - TE^j\} \geq 0$ و $\{TE_k^i - TE^i\} = 0$ بنابراین:

$$\frac{1}{TE^k + \{TE_k^i - TE^i\}} \geq \frac{1}{TE^k + \{TE_k^j - TE^j\}} \quad (2-2)$$

از (۱-۲) و (۲-۲) داریم $a_{ik} > a_{jk}$ ؛ بنابراین $w_i > w_j$.

قضیه ۳. اگر واحدهای i و j کارا و واحد k ناکارا باشد و داشته باشیم $TE_j^k < TE_i^k$
 آنگاه $a_{ik} > a_{jk}$.

اثبات: با توجه به فرض قضیه داریم:

$$TE^i + \{TE_i^k - TE^k\} > TE^j + \{TE_j^k - TE^k\} \quad (1-3)$$

از طرفی بنا به توضیحات قضیه ۲ داریم:

$$\frac{1}{TE^k + \{TE_k^i - TE^i\}} = \frac{1}{TE^k + \{TE_k^j - TE^j\}} \quad (2-3)$$

بنابراین از (۱-۳) و (۲-۳) نتیجه می‌شود $a_{ik} > a_{jk}$.

نتایج قضا یا

۱ - بر اساس قضیه ۱، برای رتبه‌بندی مجموعه‌ای از واحدها به کمک روش پیشنهادی نیازی به حذف تک‌تک واحدها برای تشکیل جدول (۱) نیست. به عبارت دیگر، قضیه ۱ نشان می‌دهد که حذف واحدهای ناکارا، هیچ‌گونه تأثیری بر کارایی دیگر واحدها ندارد و بنابراین کفایت مدل (۸) را فقط برای واحدهای کارا اجرا کنیم. از سویی دیگر، در روش بهبود یافته AHP/DEA مدل (۸) (مدل (۸)) برای $n-1$ واحد تصمیم‌گیری به کار گرفته می‌شود و نه برای ۲ واحد تصمیم‌گیری که در مفاهیم DEA غیرمعمول است. بنابراین، سومین مشکل یاد شده‌ی روش AHP/DEA در روش بهبود یافته AHP/DEA به چشم نمی‌خورد.

۲ - قضیه ۲، نشان می‌دهد در روش بهبود یافته AHP/DEA، رتبه‌بندی به گونه‌ای انجام می‌شود که واحدهای کارا در رتبه‌ای بالاتر از واحدهای ناکارای مشخص شده توسط مدل DEA قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، هماهنگی کامل بین این رتبه‌بندی و رتبه‌بندی کارا-ناکارای DEA برقرار است. بنابراین، در روش پیشنهادی، مشکل عدم انطباق با رتبه‌بندی DEA که در روش AHP/DEA وجود داشت، کاملاً منتفی است (مشکل اول).

۳ - قضیه ۳ نشان می‌دهد که در روش بهبود یافته AHP/DEA، واحدهای کارا با وجود داشتن ارجحیت برابر در ماتریس مقایسات زوجی، بر اساس عملکردشان بر روی واحدهای ناکارا رتبه بندی می‌شوند. به عبارت دقیق‌تر، واحد کارایی که حذف آن در کارایی واحدهای ناکارا تأثیر بیشتری داشته باشد، مقادیر بزرگ‌تری را در ماتریس مقایسات زوجی به خود اختصاص می‌دهد که این خود موجب بالا رفتن رتبه‌ی آن در میان دیگر واحدها خواهد شد. بنابراین، رتبه‌بندی در روش پیشنهادی، بر اساس میزان تأثیرگذاری واحدهای کارا بر واحدهای ناکارا صورت می‌پذیرد که روندی منطقی برای رتبه‌بندی واحدها است [۶].

در خصوص قدرت تفکیک‌پذیری روش بهبود یافته AHP/DEA باید یادآوری کرد که این روش همانند دیگر روش‌های رتبه‌بندی در DEA، در شرایط خاصی ممکن است نتواند تفکیک لازم را بین واحدهای کارا ایجاد کند که از جمله این شرایط کم بودن تعداد واحدها در مقابل تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها یا تأثیر یکسان واحدهای کارا در

واحدهای ناکاراست، با این حال، با توجه به اینکه در روش پیشنهادی تعداد واحدهای به کار گرفته شده در مدل بیشتر از تعداد واحدهایی است که در روش AHP/DEA در مدل به کار گرفته می‌شود و بیان این حقیقت که تعداد واحدهای به کار رفته سهم بسزایی در تفکیک پذیری واحدها دارد می‌توان نتیجه گرفت، تفکیک‌پذیری روش پیشنهادی به مراتب بهتر از تفکیک‌پذیری روش AHP/DEA است، و تعدد مثال‌های تجربی حل شده توسط این دو مدل می‌تواند گواهی بر این ادعا باشد که در این مقاله تنها به بیان یک نمونه از این مثال‌ها بسنده کرده‌ایم (مثال ۳).

بررسی رتبه‌بندی در میان واحدهای ناکارا توسط روش بهبودیافته نیز می‌تواند جالب توجه باشد. با توجه به اینکه واحدهای ناکارا تأثیری بر دیگر واحدها ندارند، میزان ارجحیت هر واحد ناکارا به واحدهای دیگر همان نسبت کارایی آن واحد محسوب می‌شود. در واقع هر واحدی که کارایی بالاتری را در میان واحدهای ناکارا داشته باشد، در روش بهبودیافته رتبه بالاتری را به خود اختصاص می‌دهد؛ بنابراین، مطابقت کاملی بین رتبه حاصل از روش بهبودیافته و رتبه حاصل از مدل DEA برای واحدهای ناکارا وجود دارد.

مثال‌های عددی

در این بخش، سه مثال آورده‌ایم که به کمک آن‌ها، ضمن توضیح روش بهبود یافته AHP/DEA مشکلات روش AHP/DEA را نشان داده و نتایج قسمت قبل را برای تفهیم بهتر در این مثال‌ها بررسی می‌کنیم. در مثال اول، روش پیشنهادی را برای رتبه‌بندی مجموعه‌ای از واحدها به کار می‌بریم و نتیجه رتبه‌بندی را با روش‌های رتبه‌بندی شناخته‌شده‌ی کارایی تقاطعی و ابرکارایی مقایسه می‌کنیم. در مثال دوم، ضمن نشان دادن عدم هماهنگی و انطباق کامل بین رتبه‌بندی AHP/DEA و رتبه‌بندی DEA، برتری روش پیشنهادی را در هماهنگی کامل با رتبه‌بندی DEA مشاهده می‌کنیم. در مثال سوم نیز، قدرت جداکنندگی روش بهبودیافته AHP/DEA را نسبت به روش AHP/DEA در یک نمونه تجربی، نشان خواهیم داد. (مثال‌ها به کمک نرم افزارهای AHP و DEAOS حل شده‌اند).

مثال ۱. جدول (۲)، داده‌های مربوط به مقاله‌ی سکستون و همکاران (۱۹۸۶) است که در آن ۶ واحد با دو ورودی و دو خروجی در نظر گرفته شده است. برای رتبه‌بندی این واحدها به کمک روش پیشنهادی، ابتدا کارایی هر یک از واحدها را توسط مدل DEA محاسبه کرده و سپس جدول کارایی‌ها (۳) را به شرحی که در بخش ۴ آمده، به دست می‌آوریم. سپس ماتریس مقایسات زوجی را به کمک مقادیر جدول (۳) به دست آورده و به کمک AHP، وزن‌های مربوط به واحدها را محاسبه کرده و نتایج را همراه با نتایج دیگر رتبه‌بندی‌ها در جدول (۴) آورده‌ایم. مشاهده می‌شود، واحد B بالاترین رتبه را در میان واحدهای کارا به دست آورده است که این ناشی از آن است که واحد B در مجموع بیشترین تأثیر را در واحدهای ناکارای E و F داشته است (جدول (۳)). همچنین همان‌طور که در جدول (۴) مشاهده می‌کنید، روش بهبودیافته AHP/DEA، یک رتبه‌بندی کامل و هماهنگ با رتبه‌بندی کارا - ناکارای DEA ارائه می‌دهد که در مقایسه با رتبه‌بندی روش کارایی تقاطعی (که از مهم‌ترین روش‌های رتبه‌بندی در DEA محسوب می‌شود) عملکرد بهتری دارد. هرچند این مثال نمی‌تواند دلیلی بر برتری کلی روش بهبود یافته بر روش‌های گفته شده باشد؛ با این حال نشان می‌دهد که روش پیشنهادی می‌تواند در نمونه‌های واقعی همانند دیگر روش‌های شناخته شده در زمینه رتبه‌بندی و حتی بهتر از آن‌ها عمل کند.

جدول ۲. داده‌های مثال ۱

واحدها	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی ۱	خروجی ۲
A	۱۵۰	۰/۲	۱۴۰۰۰	۳۵۰۰
B	۴۰۰	۰/۷	۱۴۰۰۰	۲۱۰۰۰
C	۳۲۰	۱/۲	۴۲۰۰۰	۱۰۵۰۰
D	۵۲۰	۲/۰	۲۸۰۰۰	۴۲۰۰۰
E	۳۵۰	۱/۲	۱۹۰۰۰	۲۵۰۰۰
F	۳۲۰	۰/۷	۱۴۰۰۰	۱۵۰۰۰

جدول ۳. کارایی‌ها پس از حذف واحد k ام

واحدها	کارایی	A	B	C	D	E	F
A	۱	*	۱	۱	۱	۰/۹۹۸	۰/۸۹۴
B	۱	۱	*	۱	۱	۰/۹۹۴	۱
C	۱	۱	۱	*	۱	۰/۹۹۷	۰/۸۶۷
D	۱	۱	۱	۱	*	۱	۰/۸۷۵
E	۰/۹۷۷	۱	۱	۱	۱	*	۰/۸۶۷
F	۰/۸۶۷	۱	۱	۱	۱	۰/۹۷۷	*

جدول ۴. رتبه‌بندی

رتبه‌بندی CCR		رتبه‌بندی BCC		رتبه‌بندی روش بهبود یافته AHP/DEA		رتبه‌بندی روش کارایی تقاطعی		رتبه‌بندی روش ابر کارایی	
A	۱	A	۱	B	۰/۱۷۵۱	A	۰/۷۶۴	A	۲۰۰/۰۰۰
B	۱	B	۱	A	۰/۱۷۲۳	B	۰/۷۰۰	B	۱۴۰/۶۲۵
C	۱	C	۱	D	۰/۱۷۱۸	D	۰/۷۰۰	C	۱۴۰/۰۰۰
D	۱	D	۱	C	۰/۱۷۱۵	E	۰/۶۹۶	D	۱۱۳/۰۷۷
E	۰/۹۷۷	E	۱	E	۰/۱۶۴۸	C	۰/۶۴۳	E	۹۷/۷۵۰
F	۰/۸۶۷	F	۰/۹	F	۰/۱۴۴۳	F	۰/۶۰۸	F	۸۶/۷۴۵

مثال ۲. جدول (۵) داده‌های مثالی است که در مقاله‌ی سینوانی و همکاران برای نشان دادن عدم هماهنگی کامل بین رتبه‌بندی AHP/DEA و رتبه‌بندی DEA آورده شده است که ما آن را با روش بهبود یافته اجرا کرده و نتایج را برای مقایسه در جدول (۶) آورده‌ایم.

جدول ۵. داده‌های مثال ۲

واحد	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی ۱	خروجی ۲
<i>A</i>	۲۰	۱۲	۶۰	۳۶
<i>B</i>	۱۰	۱۵	۳۰	۴۵
<i>C</i>	۱۵	۱۲	۳۰	۳۶
<i>D</i>	۵	۷۰	۱۵	۸۰
<i>E</i>	۳	۹	۳	۹
<i>F</i>	۹	۱۸	۱	۱۸
<i>G</i>	۶۳	۱۹	۸	۱۹
<i>H</i>	۲۲	۷۳	۱	۳

جدول ۶. مقایسه‌ی رتبه‌بندی دو روش ($\varepsilon = 0.001$)

رتبه‌بندی روش AHP/DEA		رتبه‌بندی DEA		رتبه‌بندی روش بهبود یافته AHP/DEA	
<i>B</i>	۰/۲۰۹۹۴	<i>A</i>	۱	<i>B</i>	۰/۱۹۹۳
<i>C</i>	۰/۱۶۲۹۱	<i>B</i>	۱	<i>D</i>	۰/۱۹۲۹
<i>A</i>	۰/۱۵۳۰۰۱	<i>D</i>	۱	<i>A</i>	۰/۱۸۸۳
<i>E</i>	۰/۱۴۲۷۷	<i>C</i>	۰/۹۹۹	<i>C</i>	۰/۱۸۸۰
<i>D</i>	۰/۱۴۱۴۰	<i>E</i>	۰/۵۱۰	<i>E</i>	۰/۰۹۱۲
<i>F</i>	۰/۰۹۸۴۰	<i>F</i>	۰/۴۰۲	<i>F</i>	۰/۰۷۴۰
<i>G</i>	۰/۰۷۶۳۷	<i>G</i>	۰/۳۳۰	<i>G</i>	۰/۰۶۲۱
<i>H</i>	۰/۰۱۵۱۷۸	<i>H</i>	۰/۰۲۲	<i>H</i>	۰/۰۰۴۱

با توجه به جدول (۶) مشاهده می‌شود، در روش AHP/DEA واحد *D* که از نظر مدل‌های DEA کارا شناخته شده است، پایین‌تر از واحد ناکارای *E* قرار گرفته است که عدم انطباق با رتبه‌بندی DEA را در این روش نشان می‌دهد. در حالی که انطباق کامل بین رتبه‌بندی روش بهبود یافته AHP/DEA با رتبه‌بندی DEA مشهود است.

مثال ۳. جدول (۷) داده‌های مربوط به پنج واحد تصمیم‌گیرنده است که هر یک سه ورودی و سه خروجی دارند. روش AHP/DEA و روش بهبود یافته را برای رتبه‌بندی این واحدها به کار برده و نتایج را در جدول (۸) آورده‌ایم.

جدول ۷. داده‌های مثال ۳

	ورودی ۱	ورودی ۲	ورودی ۳	خروجی ۱	خروجی ۲	خروجی ۳
۱	۵	۲	۱۵	۲۰۰	۵	۹
۲	۶	۲	۲۱	۱۸۰	۸	۸
۳	۴	۲	۲۰	۲۱۰	۷	۷
۴	۴	۱	۱۸	۲۰۰	۸	۵
۵	۴	۱	۱۹	۱۷۰	۸	۸

جدول ۸. مقایسه‌ی دو روش در رتبه‌بندی کامل ($\varepsilon = 0$)

رتبه‌بندی روش AHP/DEA		رتبه‌بندی DEA		رتبه‌بندی روش بهبود یافته AHP/DEA	
۵	۰/۲۰۱۷	۱	۱/۰۰۰	۵	۰/۲۰۵۱
۱	۰/۲۰۰۰	۳	۱/۰۰۰	۱	۰/۲۰۴۴
۳	۰/۲۰۰۰	۴	۱/۰۰۰	۴	۰/۲۰۴۰
۴	۰/۲۰۰۰	۵	۱/۰۰۰	۳	۰/۲۰۳۶
۲	۰/۱۹۸۳	۲	۰/۹۱۱	۲	۰/۱۸۳۰

جدول (۸) به خوبی نشان می‌دهد، چگونه منطق روش AHP/DEA در جداسازی واحدهای کارا ناتوان می‌ماند؛ در حالی که روش بهبود یافته AHP/DEA، یک رتبه‌بندی کامل از واحدها را ارائه می‌دهد.

نتیجه گیری

در این مقاله، مشکلاتی از روش AHP/DEA برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده را مطرح کرده و روش بهبود یافته‌ای را پیشنهاد دادیم. به کمک قضایا نشان دادیم، روش پیشنهادی، ضمن ارائه یک رتبه‌بندی متفاوت و البته منطقی از واحدها، مشکلات گفته شده در روش AHP/DEA را پوشش می‌دهد. در واقع، روش پیشنهادی توسعه‌ای از روش AHP/DEA محسوب می‌شود که هر چند از نظر شیوه عملکرد مشابه روش AHP/DEA عمل می‌کند؛ اما دارای منطق قوی‌تر، تفکیک پذیری بالاتر و مطابقت کامل با رتبه‌بندی کارا-ناکارای DEA است و از آنجایی که این سه اصل از اصول مهم در امر رتبه‌بندی به حساب می‌آید، مزیت روش بهبود یافته AHP/DEA بر روش قبل قابل نتیجه‌گیری است.

منابع

- 1 . N.Adler, L.Friedman, Z.Sinuany-Stern (2002). Review of ranking methods in the Data Envelopment Analysis context, European Journal of Operational Research; 140: 249-265.
- 2 . A.Charnes, W.W.Cooper, E.Rhodes (1978). Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research; 2: 429-444.
- 3 . RG.Dyson, R.Allen, AS.Camanho, VV.Podinovski, CS.Sarrico, EA.Shale, Pitfalls and protocols in DEA, European Journal of Operational Research; 132 : 59-245.
- 4 . S.Lozano, G.Villa (2009). Multiobjective target setting in data envelopment analysis using AHP, Computers & Operations Research; 36: 549-564.
- 5 . R.Ramanathan (2006). Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process, Computers & Operations Research; 33:1289-1307.
- 6 . S.C.Ray (2004). Data Envelopment Analysis, Theory and Techniques for Economics and Operations research, Cambridge University Press: 98-100.
- 7 . T.L.Saaty (1980). The Analytic Hierarchy Process, Mc Graw-Hill, New York.
- 8 . T.R.Sexton, R.H Silkman, A.J Hogan (1986). Data Envelopment Analysis Jossey-Bass, Sanfrancisco, CA: 73-105.
- 9 . Z.Sinuany-Stern, A.Mehrez, Y.Hadad (2000). An AHP/DEA methodology for ranking decision making units, Intl.Trans.inop.Res; 7: 109-124.
- 10 . Y.M.Wang, K.S.Chin, G.K.K.Poon (2008). A data envelopment analysis method with assurance region for weight generation in the analytic hierarchy process, Decision Support System 45: 913-921.

- 11 . Y.M.Wang, K.S.Chin (2008). A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making units in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*.
- 12 . Y.M.Wang, J.Liu, T.M.S.Elhagh (2008). An integrated AHP-DEA methodology for bridge risk assessment, *Computers & Operations Research*; 54: 513-525.
- 13 . T.Yang, C.Kuo (2003). A hierarchical AHP/DEA methodology for the facilities layout decision problem", *European Journal of Operational Research*; 147: 128-136.