

## مدل‌های تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز در تحلیل پوششی داده‌ها

مهدی طلوع<sup>۱</sup>، سمانه جوشقانی<sup>۲</sup>

**چکیده:** در حالی که مدل‌های متداول تحلیل پوششی داده‌ها اهداف جداگانه‌ای را برای هر واحد تصمیم‌گیری قرار می‌دهند، مدلی با عنوان مدل تخصیص ورودی متمرکز ارائه شده است که در آن یک تصمیم‌گیرنده متمرکز وجود دارد که به همه واحدهای در حال فعالیت نظارت می‌کند. هدف اصلی در این مدل، بهینه‌سازی مجموع مصرف ورودی و مجموع تولید خروجی است. در این مقاله ابتدا مدل تحویل خروجی متمرکز بیان می‌شود که به بهینه‌سازی مجموع تولید خروجی می‌پردازد. سپس در ادامه مدلی با ترکیب مدل‌های تخصیص ورودی متمرکز و تحویل خروجی متمرکز پیشنهاد می‌شود. همچنین در انتها مثال‌هایی برای نتایج این مدل‌ها ارائه می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** تخصیص ورودی متمرکز، تحویل خروجی متمرکز، کارایی، تحلیل پوششی داده‌ها، مدل شعاعی.

۱. استادیار دانشگاه آزاد واحد تهران مرکزی، ایران

۲. کارشناس ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه آزاد تهران مرکز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۸۹/۴/۱۳

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۸۹/۸/۳۰

نویسنده مسئول مقاله: مهدی طلوع

Email: m\_toloo@yahoo.com

### مقدمه

فارل [۳] برای نخستین بار در سال ۱۹۵۷ روش‌های غیر پارامتری را برای تعیین کارایی مطرح کرد. مقاله‌ی فارل [۳] در سال ۱۹۷۸ اساس کار مقاله‌ی چارنز و کوپر و رودز [۲] قرار گرفت و به مقاله‌ی CCR معروف است. پس از آن بنکر و چارنز و کوپر [۱] مدل BCC را ارایه کردند. این دو مقاله پایه‌ی بسیاری از مطالعات تحلیلی کارایی شدند و این شاخه از علم پژوهش در عملیات به سرعت پیشرفت کرد و تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نامیده شد. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) برای اندازه‌گیری کارایی یک تعداد از واحدهای در حال فعالیت مشابه استفاده می‌شود که این واحدهای در حال فعالیت را واحدهای تصمیم‌گیری (DMU<sup>۱</sup>) می‌نامند. در DEA عموماً برای ارزیابی کارایی هر DMU از مدل‌های جداگانه‌ای استفاده می‌شود. در نتیجه در تحلیل کارایی، هر یک از DMUها به‌طور جداگانه بر روی مرز کارا تصویر می‌شوند.

در عمل شرایطی می‌توانند وجود داشته باشند که در آن‌ها همه‌ی DMUها تحت یک تصمیم‌گیرنده‌ی (DM<sup>۲</sup>) متمرکز قرار گیرند، یعنی یک DM متمرکز وجود دارد که به همه‌ی واحدهای در حال فعالیت نظارت می‌کند. این شرایط زمانی اتفاق می‌افتد که همه‌ی DMUها متعلق به سازمان یکسانی (خصوصی یا عمومی) باشند. تعداد زیادی از کاربردهای DEA مانند شعبه‌های بانک، بیمارستان‌ها، بخش‌های دانشگاهی، مدارس و غیره می‌توانند در این رده قرار گیرند.

از آن‌جا که مدل‌های متداول DEA، مجموع مصرف ورودی و مجموع تولید خروجی را بررسی نمی‌کنند، مدل‌هایی تحت عنوان مدل‌های متمرکز مطرح شده‌اند که به بررسی مجموع مصرف ورودی و یا مجموع تولید خروجی می‌پردازند. به‌عنوان نمونه گالنی و همکاران [۵] مدلی را با عنوان مدل تخصیص منبع متمرکز پایه‌ای DEA در ماهیت ورودی ارایه کرده‌اند. در این مدل صرف نظر از ابتکاری بودن تابع هدف و اینکه اهداف خروجی بررسی نمی‌شوند، مدل می‌تواند همه‌ی مقدار موجود یک ورودی را تنها به یک DMU، بدون محدودیتی بر روی تغییرات مصرف منبع هر DMU اختصاص دهد. همچنین گالنی و

1. Decision Making Unit

2. Decision Maker

تامیر [۴] مدل تخصیص منبع متمرکز در ماهیت خروجی را مطرح کرده‌اند که در این مدل کران‌های بالا بر روی مجموع مصرف ورودی واحدهای مورد هدف، اعمال می‌شوند. اگرچه این مدل به اندازه‌ی کافی انعطاف پذیر است؛ ولی نسبتاً پیچیده است. لوزانو و ویلا [۶] مدلی را با عنوان تخصیص ورودی متمرکز ارائه کرده‌اند که در این مدل، DM متمرکز به بهینه‌سازی مجموع مصرف ورودی می‌پردازد. در این مدل تضمین می‌شود، مجموع تولید خروجی کاهش نمی‌یابد. در تحلیل تخصیص ورودی متمرکز همه‌ی واحدها بر روی مرز کارا به همان شکلی که در مدل‌های متداول DEA هستند، تصویر می‌شوند اما این روند در یک روش یکپارچه به جای شیوه‌های مجزا انجام می‌شود. به عبارت دیگر، در مدل متمرکز تنها از یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای تصویر کردن همه‌ی DMUها به‌طور همزمان بر روی مرز کارا استفاده می‌شود، در صورتی که در مدل‌های متداول DEA برای هر DMU یک مدل جداگانه‌ای به کار می‌رود و هر DMU به‌طور جداگانه بر روی مرز کارا تصویر می‌شود. در مقاله‌ی لوزانو و ویلا [۶] دو مدل تخصیص ورودی متمرکز شعاعی و غیرشعاعی ارائه شده است. در این مدل‌ها تخصیص هر چه کمتر ورودی‌ها مطلوب است در حالی که تحصیل هر چه بیشتر خروجی‌ها نیز می‌تواند حاصل شود. هدف نخست این مقاله‌ی مدلی برای تحصیل خروجی متمرکز در ماهیت‌های شعاعی و غیرشعاعی و بررسی ویژگی‌های مهم آن است. در ادامه مدل لوزانو ویلا [۶] با مدل پیشنهادی تحصیل خروجی متمرکز ترکیب شده، که در آن به‌طور همزمان مجموع مصرف ورودی مینیمم و مجموع تولید خروجی ماکزیمم می‌شوند. در انتها این مدل‌ها روی مثال‌های عددی اجرا شده و نتایج بررسی می‌شوند.

### مدل تخصیص ورودی متمرکز شعاعی

مدل تخصیص ورودی متمرکز شعاعی (لوزانو و ویلا) شامل دو فاز است. در اولین فاز یک کاهش متناسب برای همه‌ی ورودی‌ها جستجو می‌شود و در فاز دوم کاهش بیشتر هر ورودی و یا افزایش هر خروجی دنبال می‌شود.

فرض کنید  $l = 1, 2, \dots, n$  اندیس DMUها،  $i = 1, 2, \dots, m$  اندیس ورودی‌ها،  $r = 1, 2, \dots, s$  اندیس خروجی‌ها،  $x_{ij}$  مقدار ورودی  $i$ ام مصرف شده و  $y_{rj}$  مقدار خروجی  $r$ ام تولید شده توسط  $DMU_j$ ،  $\theta$  عامل کاهش شعاعی دست‌یافتنی برای ورودی‌ها،  $s_i$  متغیر کمبود ورودی  $i$ ام،  $t_r$  متغیر مازاد خروجی  $r$ ام و  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

بردار مربوط به تصویر کردن  $DMU_l$  باشند. مدل فاز اول تخصیص ورودی متمرکز شعاعی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \theta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\
 & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\
 & \theta \text{ free.}
 \end{aligned} \tag{1}$$

مدل (۱)، دارای  $n^2 + 1$  متغیر و  $m + s + n$  محدودیت است. برای برخی ورودی‌ها و خروجی‌ها، به ترتیب کاهش و افزایش بیشتر، معمولاً امکان پذیر است که آن‌ها این مقادیر را در متغیرهای کمبود ورودی و مازاد خروجی متناظر مدل فاز دوم می‌گیرند. فرض کنیم  $\theta^*$  مقدار بهینه‌ی مدل (۱) باشد، در این صورت فاز دوم مدل تخصیص ورودی متمرکز شعاعی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{r=1}^s t_r \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} = \theta^* \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} = \sum_{j=1}^n y_{rj} + t_r, \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\
 & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\
 & s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & t_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{2}$$

با حل مدل فاز دوم، بردار  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$  متناظر با هر  $DMU_l$ ، تعریف می‌شود. ورودی‌ها و خروجی‌ها برای چنین واحدهایی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{x}_{il} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{y}_{rl} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s.$$

قضیه‌ی زیر که توسط لوزانو و ویلا [۶] اثبات شده است، پاراتو کارا بودن نقاط تصویر حاصل را نتیجه می‌دهد.

**قضیه ۱:** هر  $DMU_l$ ، که توسط فاز دوم مدل تخصیص متمرکز شعاعی به صورت  $(\hat{x}_{1l}, \hat{x}_{2l}, \dots, \hat{x}_{ml}, \hat{y}_{1l}, \hat{y}_{2l}, \dots, \hat{y}_{sl})$  تصویر شده است، پاراتو کارا است.

### مدل تحویل خروجی متمرکز شعاعی

مدل تحویل خروجی متمرکز شعاعی در طی دو فاز به ماکزیم‌سازی مجموع تولید خروجی می‌پردازد به طوری که مجموع مصرف ورودی افزایش نمی‌یابد. در اولین فاز یک افزایش متناسب برای همه‌ی خروجی‌ها جستجو می‌شود و در فاز دوم کاهش بیشتر هر ورودی و یا افزایش هر خروجی بررسی می‌شود.

مدل فاز اول تحویل خروجی متمرکز به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max \quad \varphi \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \varphi \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\ & \quad \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\ & \quad \varphi \text{ free.} \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن  $\varphi$  عامل افزایش شعاعی دست‌یافتنی برای خروجی‌ها است. فرض کنیم  $\varphi^*$  مقدار بهینه‌ی مدل (۳) باشد، در این صورت مدل فاز دوم تحصیل خروجی متمرکز به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{r=1}^s t_r \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i, \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} = \varphi^* \sum_{j=1}^n y_{rj} + t_r, \quad r=1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l=1, \dots, n \\ & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j=1, \dots, n, l=1, \dots, n \\ & s_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m \\ & t_r \geq 0, \quad r=1, \dots, s. \end{aligned} \quad (۴)$$

با حل مدل فاز دوم، بردار  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$  متناظر با هر  $DMU_l$ ، تعریف می‌شود. ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصویر شده به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{il} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* x_{ij}, \quad i=1, \dots, m \\ \hat{y}_{rl} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* y_{rj}, \quad r=1, \dots, s. \end{aligned}$$

توجه کنید با مدل‌های پیشنهادی (۳) و (۴) می‌توان ماکزیمم مجموع تولید خروجی را برای هر یک از خروجی‌های  $DMU$ ‌ها، به دست آورد به طوری که مجموع مصرف ورودی، برای هر یک از ورودی‌های  $DMU$  افزایش نیابد.

**قضیه ۲:** هر  $DMU_l$ ، که توسط مدل فاز دوم تحصیل خروجی متمرکز شعاعی به صورت  $(\hat{x}_{1l}, \hat{x}_{2l}, \dots, \hat{x}_{ml}, \hat{y}_{1l}, \hat{y}_{2l}, \dots, \hat{y}_{sl})$  تصویر شده است، پاراتو کاراست.

**اثبات:** فرض کنید  $(s^*, t^*, \lambda^*)$  نقطه‌ی بهینه و  $(\hat{x}_{1l}, \hat{x}_{r1}, \dots, \hat{x}_{ml}, \hat{y}_{1l}, \hat{y}_{r1}, \dots, \hat{y}_{sl})$  نقطه‌ی تصویر  $DMU_l$  حاصل از مدل فاز دوم تحویل خروجی متمرکز شعاعی باشند. به خلف فرض کنیم نقطه‌ی  $(\hat{x}_{1l}, \hat{x}_{r1}, \dots, \hat{x}_{ml}, \hat{y}_{1l}, \hat{y}_{r1}, \dots, \hat{y}_{sl})$  پاراتو کارا نباشد، در این صورت با استفاده از مدل ماهیت خروجی، یک بردار  $(\lambda_{1l}, \lambda_{r1}, \dots, \lambda_{nl})$  که در  $\sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1$  صدق می‌کند، وجود دارد که در یک نقطه تصویر  $(\hat{x}_{1l}, \dots, \hat{x}_{ml}, \hat{y}_{1l}, \dots, \hat{y}_{sl})$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{x}_{il} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \hat{x}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$\hat{y}_{rl} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \hat{y}_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \quad (2)$$

از آنجا که نقطه‌ی  $(\hat{x}_{1l}, \dots, \hat{x}_{ml}, \hat{y}_{1l}, \dots, \hat{y}_{sl})$  پاراتو کارا نیست، در نتیجه نامساوی‌های بالا برای حداقل یکی از ورودی‌ها و یا یکی از خروجی‌ها به صورت اکید برقرار هستند. فرض کنید نامساوی (۲) در اندیس  $r'$  به صورت اکید برقرار باشد:

$$\hat{y}_{r'l} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{r'j} > \hat{y}_{r'j}$$

در نتیجه:

$$\sum_{r=1}^s (\hat{y}_{rl} - \hat{y}_{rl}) > 0$$

در این صورت، با در نظر گرفتن  $DMU_l$  بردار  $(\lambda_{1l}, \lambda_{r1}, \dots, \lambda_{nl})$  به جای بهینه‌ی فرض شده  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{r1}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$ ، یک جواب شدنی برای مدل فاز دوم تحویل خروجی متمرکز شعاعی با داشتن مقدار تابع هدف

$$\sum_{i=1}^m \hat{s}_i^* + \sum_{r=1}^s \hat{t}_r^* = \sum_{i=1}^m s_i^* + \sum_{r=1}^s t_r^* + \sum_{i=1}^m (\hat{x}_{il} - \hat{x}_{il}) + \sum_{r=1}^s (\hat{y}_{rl} - \hat{y}_{rl})$$

است. در نتیجه

$$\sum_{i=1}^m \hat{s}_i^* + \sum_{r=1}^s \hat{t}_r^* > \sum_{i=1}^m s_i^* + \sum_{r=1}^s t_r^*$$

با توجه به اینکه این مقدار از مقدار بهینه‌ی اولیه بیشتر است به تناقض می‌رسیم. به‌طور مشابه اگر نامساوی (۱) در اندیس  $i'$  به‌صورت اکید برقرار باشد، داریم:

$$\hat{x}_{i'l} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} < \hat{x}_{i'j}$$

و نتیجه‌ی یکسانی به‌دست می‌آید.

**قضیه ۳:** مدل (۳) همواره شدنی است.

**اثبات:** قرار دهید:

$$\varphi = 1, \quad \begin{cases} \lambda_{jl} = 1, & l = i \\ \lambda_{jl} = 0, & l \neq i \end{cases}$$

به‌وضوح  $(\varphi, \lambda)$  یک جواب شدنی مدل (۳) است.

**قضیه ۴:** مدل (۳) نسبت به انتقال ورودی‌ها پایدار است.

**اثبات:** فرض کنیم ورودی  $i$ ام همه‌ی DMUها به اندازه‌ی  $\alpha_i$  افزایش یابند. در این صورت باید رابطه‌ی  $\tilde{x}_{ij} = x_{ij} + \alpha_i \quad i = 1, \dots, m$  را در مدل (۳) اعمال کنیم. در نتیجه محدودیت‌های ورودی را به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} (x_{ij} + \alpha_i) &\leq \sum_{j=1}^n (x_{ij} + \alpha_i), \quad i = 1, \dots, m \\ \Rightarrow \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} + n\alpha_i &\leq \sum_{j=1}^n x_{ij} + n\alpha_i \Rightarrow \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود با انتقال ورودی‌ها به اندازه‌ی  $\alpha_i$ ، محدودیت‌های مدل (۳) برقرار هستند؛ بنابراین مدل (۳) نسبت به انتقال ورودی‌ها پایدار است.

**قضیه ۵:** مدل (۳) نسبت به انتقال خروجی‌ها پایدار نیست.

**اثبات:** فرض کنیم، خروجی  $r$ ام همه‌ی DMUها به اندازه‌ی  $\beta_r$  افزایش یابند. در این صورت رابطه‌ی  $\tilde{y}_{rj} = y_{rj} + \beta_r, \quad r = 1, \dots, s$  را در مدل (۳) اعمال می‌کنیم:



مشابه اثبات قضیه‌ی ۴ با اعمال رابطه‌ی بالا در محدودیت‌های مدل (۳)، مشاهده می‌شود، مدل (۳) نسبت به انتقال خروجی‌ها به اندازه‌ی  $\beta_r$ ، پایدار نیست.

**قضیه ۶.** مدل (۳) نسبت به واحد پایدار است.

**اثبات:** فرض کنیم ورودی  $n$ ام و خروجی  $r$ ام هر DMU را به ترتیب در  $\alpha_i$  و  $\beta_r$  ضرب کنیم.

$$\tilde{x}_{ij} = \alpha_i x_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad \tilde{y}_{rj} = \beta_r y_{rj} \quad r = 1, \dots, s$$

با قراردادن روابط بالا در مدل (۳)، مدل جدید را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} (\alpha_i x_{ij}) \leq \sum_{j=1}^n (\alpha_i x_{ij}), \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} (\beta_r y_{rj}) \geq \varphi \sum_{j=1}^n (\beta_r y_{rj}), \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\ & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\ & \varphi \text{ free.} \end{aligned}$$

حال محدودیت‌های ورودی و خروجی را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} (\alpha_i x_{ij}) &\leq \sum_{j=1}^n (\alpha_i x_{ij}), \quad i = 1, \dots, m \\ \Rightarrow \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} &\leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m. \\ \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} (\beta_r y_{rj}) &\geq \varphi \sum_{j=1}^n (\beta_r y_{rj}), \quad r = 1, \dots, s \\ \Rightarrow \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} &\geq \varphi \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود مدل جدید با مدل (۳) معادل است. بنابراین، مقدار کارایی در هر دو مدل یکسان و مدل (۳) نسبت به واحد پایدار است.

اگر ورودی  $i$  ام و خروجی  $r$  ام همه‌ی DMUها را به ترتیب در  $\alpha_i$  و  $\beta_r$  ضرب کنیم و مدل (۳) را برای این داده‌های جدید به کار ببریم، نتایج به دست آمده نشان می‌دهند، ممکن است نقطه‌ی تصویر متفاوتی، نسبت به داده‌های اولیه، برای هر یک از DMUها داشته باشیم ولی مجموع مصرف ورودی و مجموع تولید خروجی به دست آمده از مدل (۳) برای داده‌های اولیه و داده‌های جدید یکسان هستند.

### مدل تحویل خروجی متمرکز غیرشعاعی

در این بخش مدل تحویل خروجی متمرکز غیرشعاعی ارائه می‌شود که این مدل نیز دو فاز دارد. مدل فاز اول، یک ضریب کاهش متفاوت را برای هر خروجی بررسی می‌کند. کاهش غیرشعاعی خروجی‌ها، به مجموع مقادیر خروجی‌ها اشاره می‌کند و تصویر واحدهای موجود را بر روی مرز کارا نتیجه می‌دهد.

فرض کنید  $\varphi_r$  عامل افزایش برای مجموع تولید خروجی  $r$  ام باشد. مدل فاز اول تحویل خروجی متمرکز / غیرشعاعی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s \varphi_r \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \varphi_r \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\ & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\ & \varphi_r \text{ free}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (5)$$

مدل (۵)، دارای  $n+1$  متغیر و  $m+s+n$  محدودیت است. فرض کنید  $\varphi_r^*$  مقدار بهینه‌ی  $\varphi_r$  در مدل (۵) باشد، در این صورت مدل فاز دوم تحویل خروجی متمرکز / غیرشعاعی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \max \quad \sum_{i=1}^m s_i \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i, \quad i=1, \dots, m \\
& \quad \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} = \varphi_r^* \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r=1, \dots, S \\
& \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l=1, \dots, n \\
& \quad \lambda_{jl} \geq 0, \quad j=1, \dots, n, l=1, \dots, n \\
& \quad s_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{۶}$$

توجه کنید در این مدل متغیر کمکی خروجی مورد نیاز نیست؛ زیرا مدل فاز اول ماکزیمم افزایش را برای مقادیر خروجی دارد. زمانی که مدل فاز دوم حل می‌شود، بردار  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$  متناظر با هر  $DMU_l$ ، تعریف می‌شود. ورودی‌ها و خروجی‌ها برای این نقاط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{il} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* x_{ij}, \quad i=1, \dots, m \\
\tilde{y}_{rl} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* y_{rj}, \quad r=1, \dots, S.
\end{aligned}$$

**قضیه ۷.** برای هر  $DMU_l$  که توسط مدل فاز دوم تحویل خروجی متمرکز / غیرشعاعی که به صورت  $(\tilde{x}_{1l}, \tilde{x}_{2l}, \dots, \tilde{x}_{ml}, \tilde{y}_{1l}, \tilde{y}_{2l}, \dots, \tilde{y}_{sl})$  تصویر شده، پاراتو کارا است. **اثبات:** فرض کنید  $(s^*, t^*, \lambda^*)$  نقطه‌ی بهینه و  $(\tilde{x}_{1l}, \tilde{x}_{2l}, \dots, \tilde{x}_{ml}, \tilde{y}_{1l}, \tilde{y}_{2l}, \dots, \tilde{y}_{sl})$  پاراتو کارا نباشد. نقطه‌ی تصویر  $DMU_l$  حاصل از مدل فاز دوم تحویل خروجی متمرکز غیرشعاعی باشد. به خلف فرض کنیم واحد  $(\tilde{x}_{1l}, \tilde{x}_{2l}, \dots, \tilde{x}_{ml}, \tilde{y}_{1l}, \tilde{y}_{2l}, \dots, \tilde{y}_{sl})$  پاراتو کارا نباشد در این صورت با استفاده از مدل BCC ماهیت خروجی بردار  $(\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \dots, \lambda_{nl})$  که در  $\sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1$  صدق می‌کند، وجود دارد که در یک نقطه‌ی تصویر  $(\tilde{x}_{1l}, \dots, \tilde{x}_{ml}, \tilde{y}_{1l}, \dots, \tilde{y}_{sl})$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{x}_{il} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \tilde{x}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$\tilde{y}_{rl} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \tilde{y}_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \quad (2)$$

از آنجا که نقطه‌ی  $(\tilde{x}_{1l}, \dots, \tilde{x}_{ml}, \tilde{y}_{1l}, \dots, \tilde{y}_{sl})$  پاراتو کارا نیست، در نتیجه نامساوی‌های بالا برای حداقل یکی از ورودی‌ها به صورت اکید برقرار است. فرض کنید، نامساوی (۱) در اندیس  $i'$  به صورت اکید برقرار باشد:

$$\tilde{x}_{i'l} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} < \tilde{x}_{i'l}$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^m (\tilde{x}_{i'l} - \tilde{x}_{i'l}) > 0$$

در این صورت، با در نظر گرفتن  $DMU_l$  بردار  $(\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \dots, \lambda_{nl})$  به جای بهینه‌ی فرض شده  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$ ، منجر به یک جواب شدنی برای مدل فاز دوم تحصیل خروجی متمرکز غیرشعاعی با داشتن مقدار تابع هدف  $\sum_{i=1}^m s_i^* + \sum_{i=1}^m (\tilde{x}_{i'l} - \tilde{x}_{i'l}) > \sum_{i=1}^m s_i^*$  است که این مقدار بیشتر از مقدار بهینه‌ی اولیه است و به تناقض منجر می‌شود.

سپس جواب بهینه‌ی مدل فاز دوم تحصیل خروجی متمرکز غیرشعاعی مربوط به  $DMU_l$  با بردار  $(\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \dots, \lambda_{nl})$  به جای بهینه‌ی فرض شده را، بررسی می‌کنیم و مقادیر زیر را داریم:

$$\varphi_{r'} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \tilde{y}_{r'j} + \tilde{y}_{r'l}}{\sum_{j=1}^n y_{r'j}} > \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_{r'j}}{\sum_{j=1}^n y_{r'j}} = \varphi_{r'}^*$$

$$\varphi_r = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \tilde{y}_{rj} + \tilde{y}_{rl}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} = \varphi_r^*, \quad \forall r \neq r'$$

در نتیجه می‌توانیم یک جواب شدنی از مدل فاز دوم تحویل خروجی متمرکز غیرشعاعی با مقدار تابع هدف بیشتر نسبت به مقدار بهینه‌ی آن داشته باشیم و این تناقض است.

### مدل تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز شعاعی

در این بخش مدلی ارائه می‌شود که در آن به‌طور همزمان هدف، کاهش مجموع مصرف ورودی و افزایش مجموع تولید خروجی برای همه‌ی DMUها به یک میزان است. مدل فاز اول تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز شعاعی به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha\theta - \beta\varphi \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \varphi \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\
 & \theta \leq 1, \\
 & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\
 & \theta \text{ free} \\
 & \varphi \text{ free.}
 \end{aligned} \tag{V}$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  ضرایب کاهش و افزایش به‌ترتیب برای کاهش ورودی و افزایش خروجی هستند که توسط کاربر انتخاب می‌شوند.

مدل (V)، دارای  $n^2 + 2$  متغیر و  $m + s + n + 1$  محدودیت است. در مدل متمرکز این امکان وجود دارد که همه‌ی ورودی‌ها و خروجی‌های هر یک از DMUها به یک تصویر بهینه تنظیم شوند که لزوماً یک نقطه‌ی اکیداً غالب بر آن DMU نیستند. از آنجا که در مدل (V) هدف مینیمم کردن مجموع مصرف ورودی و ماکزیمم کردن تولید خروجی است، در نتیجه برای یک DMU در هنگام تصویر کردن، می‌توان افزایش در ورودی آن را داشت و این در حالی است که DMUهای دیگر باید جبران این افزایش را انجام دهند تا در بهینگی مجموع مصرف ورودی کاهش یابد. این شرایط برای خروجی‌ها هم، به‌طور مشابه برقرار

است. در نتیجه با قرار دادن قید  $\theta \leq 1$  در مدل (۷) می‌توان در نتایج به‌دست آمده، به شرایط بهتری دست یافت. برای برخی ورودی‌ها یا خروجی‌ها، معمولاً کاهش یا افزایش بیشتر امکان پذیر است که این مقادیر در متغیرهای کمکی با حل مدل فاز دوم تحصیل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز شعاعی که به‌صورت زیر است، به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{r=1}^s t_r \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} = \theta^* \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} = \varphi^* \sum_{j=1}^n y_{rj} + t_r, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\ & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\ & s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & t_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (8)$$

با حل مدل (۸)، بردار  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$  متناظر با هر  $DMU_l$ ، تعریف می‌شود. ورودی‌ها و خروجی‌ها برای چنین واحدهایی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{x}_{il} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{y}_{rl} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s.$$

با توجه به قضیه ۲ به سادگی می‌توان نشان داد، نقطه‌ی تصویر  $(\hat{x}_{1l}, \hat{x}_{2l}, \dots, \hat{x}_{ml}, \hat{y}_{1l}, \hat{y}_{2l}, \dots, \hat{y}_{sl})$  حاصل از مدل تحصیل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز شعاعی پاراتو کارا است.

### مدل تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز غیرشعاعی

در این بخش مدل (۷) را در فرم غیرشعاعی مطرح می‌کنیم. در این مدل به منظور بهینه‌سازی مجموع مصرف ورودی و مجموع تولید خروجی همه‌ی DMUها به‌طور همزمان، کاهش و افزایش جداگانه‌ای را در ورودی و خروجی هر DMU داریم. فرض کنید  $\theta_i$  عامل کاهش برای مجموع مصرف ورودی  $i$ ام و  $\varphi_r$  عامل افزایش خروجی  $r$ ام باشند. همچنین  $\alpha_i$  و  $\beta_r$  ضرایب کاهش و افزایش به‌ترتیب برای کاهش ورودی و افزایش خروجی هستند که توسط کاربر انتخاب می‌شوند. مدل تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز غیرشعاعی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha_i \sum_{i=1}^m \theta_i - \beta_r \sum_{r=1}^s \varphi_r \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \theta_i \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \varphi_r \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1, \quad l = 1, \dots, n \\ & \theta_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ & \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n \\ & \theta_i \text{ free}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \varphi_r \text{ free}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (9)$$

توجه کنید در این مدل نیازی به حل مدل فاز دوم برای یافتن مقدار کاهش بیشتر در ورودی‌ها یا افزایش بیشتر در خروجی‌ها نیست؛ زیرا مدل (۹) ماکزیمم کاهش را برای مقادیر ورودی و ماکزیمم افزایش را برای مقادیر خروجی دارد.

با حل مدل (۹)، بردار  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$  متناظر با هر  $DMU_l$ ، واحد فعال مورد هدف، تعریف می‌شود. ورودی‌ها و خروجی‌ها برای این نقاط به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\tilde{x}_{il} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\tilde{y}_{rl} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl}^* y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s.$$

قضیه ۹. برای هر  $DMU_l$  که توسط مدل تحصیل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز غیرشعاعی که به صورت  $(\tilde{x}_{1l}, \tilde{x}_{2l}, \dots, \tilde{x}_{ml}, \tilde{y}_{1l}, \tilde{y}_{2l}, \dots, \tilde{y}_{sl})$  تصویر شده، پاراتو کارا است.

**اثبات:** به خلف فرض کنید  $(\tilde{x}_{1l}, \tilde{x}_{2l}, \dots, \tilde{x}_{ml}, \tilde{y}_{1l}, \tilde{y}_{2l}, \dots, \tilde{y}_{sl})$  نقطه‌ی تصویر  $DMU_l$  حاصل از مدل تحصیل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز غیرشعاعی پاراتو کارا نباشد؛ در این صورت با استفاده از مدل BCC بردار  $(\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \dots, \lambda_{nl})$  که در  $\sum_{j=1}^n \lambda_{jl} = 1$  صدق می‌کند، وجود دارد که در یک نقطه‌ی تصویر  $(\tilde{\tilde{x}}_{1l}, \dots, \tilde{\tilde{x}}_{ml}, \tilde{\tilde{y}}_{1l}, \dots, \tilde{\tilde{y}}_{sl})$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\tilde{x}}_{il} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} \leq \tilde{x}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$\tilde{\tilde{y}}_{rl} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{rj} \geq \tilde{y}_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \quad (2)$$

از آنجا که نقطه  $(\tilde{\tilde{x}}_{1l}, \dots, \tilde{\tilde{x}}_{ml}, \tilde{\tilde{y}}_{1l}, \dots, \tilde{\tilde{y}}_{sl})$  پاراتو کارا نیست، در نتیجه نامساوی‌های بالا برای حداقل یکی از ورودی‌ها و یا خروجی‌ها به صورت اکید برقرار است. حال فرض کنید نامساوی (۱) در اندیس  $i'$  و نامساوی (۲) در اندیس  $r'$  به صورت اکید برقرار باشند:

$$\tilde{\tilde{x}}_{i'l} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} x_{ij} < \tilde{x}_{i'l}$$

$$\tilde{\tilde{y}}_{r'l} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jl} y_{r'j} > \tilde{y}_{r'l}$$

در نتیجه‌ی روابط زیر را داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{i'} = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} + \tilde{x}_{i'l}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} < \frac{\sum_{l=1}^n \tilde{x}_{i'l}}{\sum_{j=1}^n x_{i'l}} = \theta_{i'}^*, \\ \theta_i = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} + \tilde{x}_{il}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \leq \frac{\sum_{l=1}^n \tilde{x}_{il}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} = \theta_i^*, \quad \forall i \neq i' \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{i=1}^m \theta_i < \sum_{i=1}^m \theta_i^* \quad (۳)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{r'} = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_{r'j} + \tilde{y}_{r'l}}{\sum_{j=1}^n y_{r'j}} > \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_{r'j}}{\sum_{j=1}^n y_{r'j}} = \varphi_{r'}^*, \\ \varphi_r = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_{rj} + \tilde{y}_{rl}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} = \varphi_r^*, \quad \forall r \neq r' \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{r=1}^s \varphi_r > \sum_{r=1}^s \varphi_r^* \quad (۴)$$

با توجه به نامساوی‌های (۳) و (۴) داریم:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{r=1}^s \varphi_r < \sum_{i=1}^m \theta_i^* - \sum_{r=1}^s \varphi_r^*$$

در نتیجه یک جواب شدنی از مدل تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز غیرشعاعی با مقدار تابع هدف بیشتر نسبت به مقدار بهینه‌ی آن به‌دست آمد و به تناقض می‌رسیم.

### مثال‌های عددی

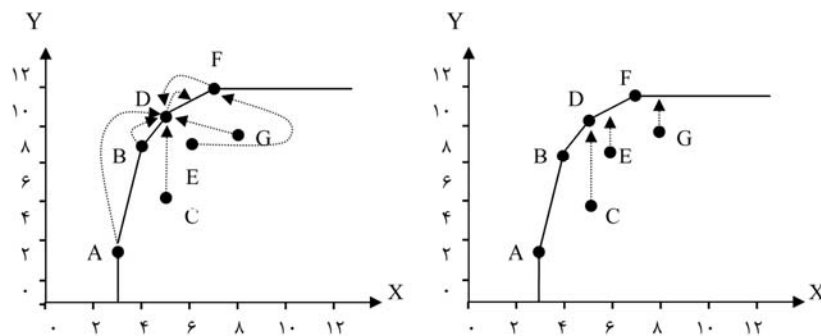
در این قسمت مدل‌های ارزیابی شده بر روی سه مجموعه‌ی داده‌ها با تعداد ورودی و خروجی‌های مختلف به کار گرفته می‌شوند. ابتدا مثالی با یک ورودی و یک خروجی بررسی می‌شود. برای داده‌های جدول (۱) مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی بر هم منطبق

هستند. مدل ماهیت خروجی و مدل تحصیل خروجی متمرکز برای این داده‌ها به کار برده می‌شوند. نتایج را در جدول (۱) با استفاده از نرم‌افزار WINQSB مشاهده می‌کنید.

جدول ۱. داده‌های مثال یک ورودی و یک خروجی و نتایج مدل‌های BCC ماهیت خروجی و مدل تحصیل خروجی متمرکز برای این داده‌ها

DMU	داده‌ها		مدل BCC ماهیت خروجی		مدل تحصیل خروجی متمرکز	
	$x$	$y$	$x^*$	$y^*$	$\hat{x} = \tilde{x}$	$\hat{y} = \tilde{y}$
A	۳	۳	۳	۳	۵	۱۰
B	۴	۸	۴	۸	۵	۱۰
C	۵	۵	۵	۱۰	۵	۱۰
D	۵	۱۰	۵	۱۰	۶	۱۰/۵
E	۶	۸	۶	۱۰/۵	۷	۱۱
F	۷	۱۱	۷	۱۱	۵	۱۰
G	۸	۹	۸	۱۱	۵	۱۰
مجموع	۳۸	۵۴	۳۸	۶۳/۵	۳۸	۷۱/۵

همان‌طور که در جدول (۱) واضح است با استفاده از مدل تحصیل خروجی متمرکز، افزایش خروجی بیشتری نسبت به مدل BCC-O به دست می‌آید.



ب: تصویر DMUها حاصل از مدل تحصیل خروجی متمرکز

الف: تصویر DMUها حاصل از مدل BCC-O

نمودار ۱. تصویر DMUهای حاصل از مدل BCC-O و مدل تحصیل خروجی متمرکز

نمودار (۱) نشان می‌دهد، در مدل تحویل خروجی متمرکز، DMUها بر خلاف مدل BCC-O، تنها در راستای محور خروجی تصویر نمی‌شوند و ورودی و خروجی تصویر هر یک از DMUها می‌توانند افزایش و یا کاهش یابند. به‌عنوان نمونه،  $DMU_B$  یک DMU کارا است و در نتیجه بر روی مرز کارا قرار دارد. با استفاده از مدل BCC ماهیت خروجی در ورودی و خروجی تصویر این DMU تغییری حاصل نمی‌شود؛ ولی نتایج مدل تحویل خروجی متمرکز برای این DMU نشان می‌دهد که ورودی و خروجی تصویر این DMU هر دو افزایش می‌یابند. این مطلب هدف اصلی مدل تحویل خروجی متمرکز را در بهینه‌سازی مجموع تولید خروجی نشان می‌دهد.

در ادامه مثالی با یک ورودی و دو خروجی بررسی می‌شود. برای داده‌های جدول (۲) ابتدا مدل BCC-O و سپس مدل‌های تحویل خروجی متمرکز شعاعی و غیرشعاعی استفاده می‌شود. نتایج این مدل‌ها با استفاده از نرم‌افزار WINQSB در جدول (۲) مشاهده می‌شوند.

جدول ۲. داده‌های مثال یک ورودی و دو خروجی، و نتایج مدل‌های BCC-O و مدل تحویل خروجی متمرکز (شعاعی و غیرشعاعی) برای این مثال

DMU	داده‌ها			مدل BCC ماهیت خروجی			مدل تحویل خروجی متمرکز شعاعی			مدل تحویل خروجی متمرکز غیر شعاعی		
	$x$	$y_1$	$y_2$	$x^*$	$y_1^*$	$y_2^*$	$\hat{x}$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\bar{x}$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$
A	۱	۱	۵	۱	۲	۷	۱	۴	۶	۱	۵	۵
B	۱	۲	۷	۱	۲	۷	۱	۴	۶	۱	۵	۵
C	۱	۳	۴	۱	۴/۲۸	۵/۷۱	۱	۵	۵	۱	۵	۵
D	۱	۴	۳	۱	۵/۳۳	۴	۱	۴/۷۰	۵/۲۹	۱	۵	۵
E	۱	۴	۶	۱	۴	۶	۱	۴	۶	۱	۵	۵
F	۱	۵	۵	۱	۵	۵	۱	۴	۶	۱	۵	۵
G	۱	۶	۲	۱	۶	۲	۱	۵	۵	۱	۵	۵
مجموع	۷	۲۵	۳۲	۷	۲۸/۶۱	۳۶/۷۱	۷	۳۰/۷۰	۳۹/۲۹	۷	۳۵	۳۵

همان‌طور که انتظار داریم، در مدل‌های متمرکز مجموع تولید هر دو خروجی بیشتر از مدل BCC-O افزایش می‌یابند. همچنین در مدل متمرکز غیرشعاعی به نسبت مدل شعاعی نتیجه‌ی تعادل بهتری در افزایش مجموع خروجی‌ها به دست می‌آید.

در انتها مثالی با دو ورودی و دو خروجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورودی‌ها و خروجی‌های این مثال در جدول (۳) مشاهده می‌شوند.

جدول ۳. داده‌های مثال دو ورودی و دو خروجی

DMU	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
۱	۹	۹	۲	۱
۲	۱۲	۸	۳	۱
۳	۷	۱۲	۲	۲
۴	۶	۱۰	۵	۳
۵	۱۰	۵	۴	۴
۶	۸	۱۰	۳	۳
۷	۱۲	۱۰	۶	۶
۸	۱۴	۶	۸	۲
۹	۱۲	۱۲	۱	۶
۱۰	۸	۸	۳	۵
مجموع	۹۸	۹۰	۳۷	۳۳

برای داده‌های جدول (۳) ابتدا مدل تخصیص ورودی متمرکز (مدل (۱)) و مدل تحویل خروجی متمرکز (مدل (۳)) به کار برده می‌شود. نتایج در جدول (۴) مشاهده می‌شوند.

جدول ۴. نتایج مدل‌های تخصیص ورودی متمرکز و تحویل خروجی متمرکز برای مثال دو ورودی و دو خروجی

	مجموع مصرف ورودی		مجموع تولید خروجی	
	ورودی اول	ورودی دوم	خروجی اول	خروجی دوم
مدل تخصیص ورودی متمرکز (مدل (۱))	۸۰/۷۱	۷۴/۱۲	۴۴/۸۲	۳۵/۱۸
مدل تحویل خروجی متمرکز (مدل (۳))	۹۸	۹۰	۵۲/۸۴	۴۷/۰۷

از آنجا که در مدل‌های متمرکز، هدف بهینه‌سازی مجموع مصرف ورودی و مجموع تولید خروجی است، در تصویر کردن DMUها به‌طور همزمان، علاوه بر مینیمم‌سازی

مجموع مصرف ورودی در ماهیت ورودی با این شرط که مجموع تولید خروجی اولیه کاهش نمی‌یابد، مجموع تولید خروجی نیز می‌تواند در بهینگی تغییر کند. همان‌طور که در جدول (۴) واضح است مجموع مصرف ورودی بهتری در مدل تخصیص ورودی متمرکز و مجموع تولید خروجی بهتری در مدل تحویل خروجی متمرکز به دست می‌آید. برای این که نتایج بهتری را برای مجموع مصرف ورودی و مجموع تولید خروجی به‌طور همزمان داشته باشیم، مدل تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز شعاعی را برای داده‌های جدول (۳) با فرض  $\alpha = 1, \beta = 0.5$ ، به کار می‌بریم. نتایج مدل تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز شعاعی با استفاده از نرم‌افزار WINQSB در جدول (۵) ملاحظه می‌شوند.

جدول ۵. نتایج مدل تحویل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز شعاعی

مدل (۷)

DMU	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
۱	۶	۱۰	۵	۳
۲	۶	۱۰	۵	۳
۳	۱۰	۵	۴	۴
۴	۱۰	۵	۴	۴
۵	۷/۸۲	۷/۷۲	۴/۵۴	۳/۴۵
۶	۶	۱۰	۵	۳
۷	۱۲	۱۰	۶	۶
۸	۷/۲۶	۸/۷۴	۳/۷۴	۴/۲۶
۹	۱۰	۵	۴	۴
۱۰	۱۰	۵	۴	۴
مجموع	۸۵/۰۸	۷۶/۴۶	۴۵/۲۸	۳۸/۷۱

همان‌طور که در جدول (۵) مشاهده می‌شود، مجموع مصرف ورودی‌ها و مجموع تولید خروجی‌ها به‌طور همزمان بهینه می‌شوند. حال مدل (۹) را با فرض  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5$ ، برای جدول (۳) به کار می‌بریم. در جدول (۶) نتایج حاصل با استفاده از نرم‌افزار WINQSB مشاهده می‌شوند.

جدول ۶. نتایج مدل تحصیل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز غیرشعاعی

DMU	مدل (۹)			
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$
۱	۸	۷/۵	۴/۵	۳/۵
۲	۱۰	۵	۴	۴
۳	۱۰	۵	۴	۴
۴	۱۰	۵	۴	۴
۵	۱۰	۵	۴	۴
۶	۱۰	۵	۴	۴
۷	۱۰	۵	۴	۴
۸	۱۰	۵	۴	۴
۹	۱۰	۵	۴	۴
۱۰	۱۰	۵	۴	۴
مجموع	۹۸	۵۲/۵	۴۰/۵	۳۹/۵

جدول (۶) نشان می‌دهد، مدل تحصیل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز غیرشعاعی می‌تواند کاهش و افزایش مؤثرتری به ترتیب در مجموع مصرف برخی ورودی‌ها و مجموع تولید برخی خروجی‌ها به دست آورد؛ اگرچه ممکن است تا حدی مجموع برخی دیگر از ورودی‌ها را افزایش و مجموع تولید برخی دیگر از خروجی‌ها را کاهش دهد.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل تحصیل خروجی متمرکز مطرح شد که در این مدل هدف بهینه‌سازی مجموع تولید خروجی است. در این مدل همه‌ی DMUها به‌طور همزمان بر روی مرز کارا تصویر می‌شوند و با این تضمین که مجموع مصرف ورودی‌ها افزایش نمی‌یابند، تغییرات بر روی مجموع مصرف ورودی‌ها نیز اعمال می‌شوند. از آن‌جا که در مدل‌های متداول DEA برای ارزیابی کارایی هر یک از DMUها مدل جداگانه‌ای به کار می‌رود، با استفاده از مدل متمرکز تنها یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای بهینه‌سازی مجموع مصرف ورودی‌ها و مجموع تولید خروجی‌های همه‌ی DMUها استفاده شد. همچنین در ادامه، مدل تحصیل خروجی متمرکز و تخصیص ورودی متمرکز بیان شد که با به کار بردن این مدل می‌توان به

نتیجه‌ی تعادل بهتری برای بهینه‌سازی مجموع مصرف ورودی و مجموع تولید خروجی دست پیدا کرد.

## منابع

- 1 . Banker RD, Charnes A, Cooper WW (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*; 30(9):1078-92.
- 2 . Charnes A, Cooper W.W, Rhodes E (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational research* 2/6: 429-444.
- 3 . Farrell M.J (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 120: 253-290.
- 4 . Golany B, E Tamir (1995). Evaluating Efficiency-Effectiveness-Equality Trade-offs: A Data Envelopment analysis Approach .*Management Science* 41(7): 1172-1184
- 5 . Golany, et al (1993). Models for Improved Effectiveness based on DEA Efficiency Results .*IIE Transactions* 25(6): 2-10.
- 6 . Lozano S, Villa G (2004). Centralized resource allocation using data envelopment analysis. *Journal of Productivity Analysis* , 22: 143-61.